

เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 1 มุมและการวัดมุม

ตอนที่ 1 จงเติมคำถามต่อไปนี้ให้ถูกต้อง

1. มุมที่เกิดจากปลายเส้นตรง 2 เส้นเชื่อมกันที่จุดจุดหนึ่ง เรียกว่ามุมอะไร

(จุดยอดมุม (Vertex))

2. หน่วยในการวัดมุมมี 2 หน่วย ได้แก่หน่วยอะไร

(หน่วยองศา (Degree) และหน่วยเรเดียน (Radian เขียนย่อว่า Rad))

3. 1 องศา เท่ากับกี่ลิปดา (60 ลิปดา)

1 ลิปดา เท่ากับกี่ฟิลิปดา (60 ฟิลิปดา)

1 ฟิลิปดา เท่ากับกี่องศา ($60 \times 60 = 3,600$ องศา)

4. 1° เท่ากับกี่ rad

$$\left[\frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad} \right]$$

5. 1 rad เท่ากับกี่องศา

$$\left[\frac{180^\circ}{\pi} \text{ องศา} \right]$$

6. 180° เท่ากับกี่ rad

(π rad)

7. 360° เท่ากับกี่ rad

(2π rad)

8. เรเดียน คืออะไร

(คือหน่วยวัดมุมชนิดหนึ่งบนระนาบสองมิติในหน่วยเรเดียน)

9. องศา คืออะไร

(คือหน่วยวัดมุมชนิดหนึ่งบนระนาบสองมิติ โดยใน 1 วงกลมจะแบ่งออกเป็น 360 องศา)

10. π มีค่าเท่ากับเท่าไร

$$\left(\frac{22}{7} = 3.14 \right)$$

ตอนที่ 2 จงแสดงวิธีการคำนวณ

1. จงแปลงมุมองศาจุดทศนิยม 35.1675° เป็นองศาลิปดาและฟิลิปดา

วิธีทำ เนื่องด้วย 1 องศา = 60 ลิปดา

∴ ให้คูณตัวเลขหลังจุดทศนิยม ซึ่งเป็นค่าลิปดาด้วย 60

$$0.1675 \times 60 = 10.05 \text{ ลิปดา}$$

และ 1 ลิปดา = 60 ฟิลิปดา

∴ ให้คูณตัวเลขหลังจุดทศนิยมคือ 0.05 ด้วย 60 ซึ่งเป็นค่าฟิลิปดา

$$0.05 \times 60 = 3 \text{ ฟิลิปดา}$$

ดังนั้น 35.1675° จึงเท่ากับ 35 องศา 10 ลิปดา 3 ฟิลิปดา หรือเท่ากับ $35^\circ 10' 3''$

ตอบ

2. จงแปลงองศาลิปดา ฟิลิปดา $54^\circ 45' 48''$ ให้เป็นองศาทศนิยม

วิธีทำ $54^\circ 45' 48'' = 54^\circ + \left(\frac{45}{60} + \frac{48}{3,600} \right)$

$$= 54^\circ + (0.75 + 0.0133)$$

$$= 54.7633^\circ$$

ตอบ

3. จงเปลี่ยนมุม 55 องศา ให้เป็นหน่วย rad

วิธีทำ $1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad}$

$$55^\circ = \frac{55 \times \pi}{180^\circ} = \frac{55 \times 3.143}{180^\circ}$$

$$= 0.96 \text{ rad}$$

ตอบ

4. จงเปลี่ยนมุม 150 องศา ให้เป็นหน่วย rad

วิธีทำ $1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad}$

$$150^\circ = \frac{150^\circ \times \pi}{180^\circ}$$

$$= \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

ตอบ

5. จงเปลี่ยนมุม 1.3 rad ให้เป็นหน่วยองศา

วิธีทำ $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \text{ องศา}$

$$\begin{aligned} 1.3 \text{ rad} &= \frac{1.3 \times 180^\circ}{\pi} \\ &= 74.45^\circ \end{aligned}$$

ตอบ

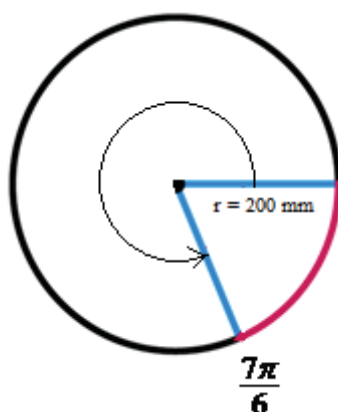
6. จงเปลี่ยนมุม $\frac{11\pi}{6}$ rad ให้เป็นหน่วยองศา

วิธีทำ $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \text{ องศา}$

$$\begin{aligned} \frac{11\pi}{6} \text{ rad} &= \frac{11\pi}{6} \times \frac{180^\circ}{\pi} \\ &= 330^\circ \end{aligned}$$

ตอบ

7. วงกลมวงหนึ่งมีรัศมี 200 mm เมื่อวัดไปเป็นมุม $\frac{7\pi}{6}$ จงคำนวณหาความยาวของเส้นโค้งนี้



วิธีทำ จาก $s = r\theta$

แทนค่า $s = (200 \text{ mm}) \frac{7\pi}{6}$

$$s = 733.37 \text{ mm}$$

ตอบ

8. เชือกเส้นหนึ่งพันรอบรอก ซึ่งมีรัศมี 350 มิลลิเมตร เมื่อหมุนรอกไปเป็นมุม 210° จงคำนวณหาความยาวของเส้นเชือกนี้

วิธีทำ ต้องเปลี่ยนมุมจากองศาเป็น rad

$$210^\circ = \frac{210^\circ \times \pi}{180^\circ} = \frac{210^\circ \times 3.143}{180^\circ} = 3.67 \text{ rad}$$

จาก $s = r\theta$

แทนค่า $s = (350 \text{ mm})(3.67 \text{ rad})$

$$s = 1,284.5 \text{ mm}$$

ตอบ

9. วัวตัวหนึ่งถูกผูกเชือกไว้กับเสา ถ้าวัวตัวนี้เดินไปเป็นระยะทาง 7.5 เมตร โดยที่เชือกตึงและเชือกกวาดไปเป็นมุม $\frac{4\pi}{3}$ เรเดียน เชือกที่ใช้ผูกวัวตัวนี้ไว้กับเสามีความยาวเท่าไร

วิธีทำ จาก

$$s = r\theta$$

แทนค่า

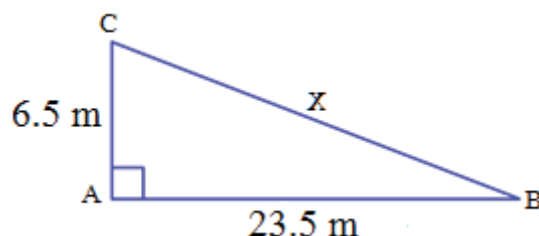
$$\begin{aligned} r &= \frac{s}{\theta} \\ r &= \frac{7.5 \text{ m}}{\frac{4\pi}{3}} \\ r &= \frac{7.5 \text{ m} \times 3}{4\pi} \\ r &= 1.79 \text{ m} \end{aligned}$$

ตอบ

เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 2 ตรีโกณมิติ

จงแสดงวิธีการคำนวณ

1. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีความยาวของด้านดังแสดงในรูป จงใช้ทฤษฎีพีทาโกรัสหาความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก



วิธีทำ จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$x^2 = AB^2 + BC^2$$

แทนค่า

$$x^2 = 23.5^2 + 6.5^2$$

$$x = \sqrt{23.5^2 + 6.5^2}$$

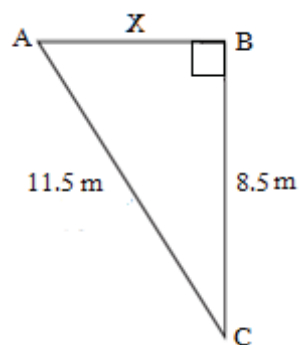
$$x = \sqrt{552.25 + 42.25}$$

$$x = \sqrt{594.5}$$

$$x = 24.38 \text{ m}$$

ตอบ

2. จงคำนวณหาพื้นที่สามเหลี่ยมดังแสดงในรูป



วิธีทำ จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$c^2 = a^2 + b^2$$

แทนค่า

$$(11.5)^2 = x^2 + (8.5)^2$$

$$x^2 = (11.5)^2 - (8.5)^2$$

$$x = \sqrt{(11.5)^2 - (8.5)^2}$$

$$x = \sqrt{132.25 - 72.25}$$

$$x = \sqrt{60}$$

$$x = 7.75 \text{ m}$$

$$\text{พื้นที่ } \Delta = \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$$

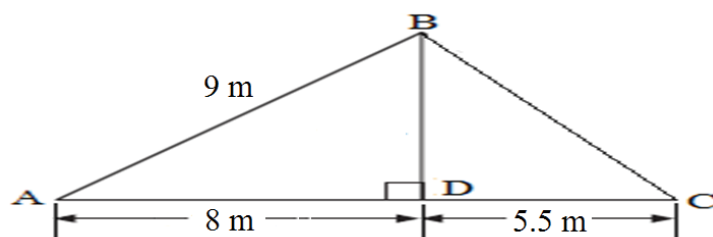
แทนค่า

$$\text{พื้นที่ } \Delta = \frac{1}{2} \times 7.75 \text{ m} \times 8.5 \text{ m}$$

$$\text{พื้นที่ } \Delta = 32.94 \text{ m}$$

ตอบ

3. โครงหลังคาบ้านหลังหนึ่งทำจากเหล็กรูปตัวซี มีขนาดดังแสดงในรูป จงใช้ทฤษฎีพีทาโกรัสหาความยาวของเหล็กรูปตัวซีทั้งหมดที่ใช้ทำโครงหลังคาบ้านหลังนี้



วิธีทำ จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$(AB)^2 = (AD)^2 + (BD)^2$$

$$(BD)^2 = (AB)^2 - (AD)^2$$

แทนค่า

$$(BD)^2 = 9^2 - 8^2$$

$$BD = \sqrt{9^2 - 8^2}$$

$$BD = \sqrt{81 - 64}$$

$$BD = \sqrt{17}$$

$$BD = 4.123 \text{ m}$$

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$(BC)^2 = (CD)^2 + (BD)^2$$

แทนค่า

$$(BC)^2 = 5.5^2 + 4.123^2$$

$$BC = \sqrt{5.5^2 + 4.123^2}$$

$$BC = \sqrt{30.25 + 17}$$

$$BC = \sqrt{47.25}$$

$$BC = 6.874 \text{ m}$$

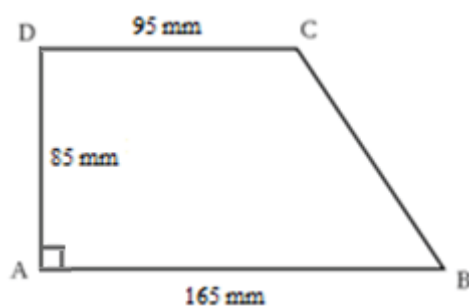
ความยาวของเหล็กที่ใช้ทำโครงหลังคาบ้าน = AC + AB + BC + BD

$$= 13.5 \text{ m} + 9 \text{ m} + 6.874 \text{ m} + 4.123 \text{ m}$$

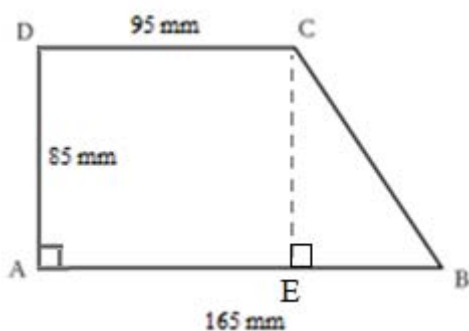
$$= 33.497 \text{ m}$$

ตอบ

4. จงหาเส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ดังแสดงในรูป



วิธีทำ เขียนรูปใหม่เพื่อให้สะดวกในการคำนวณ



จากรูปใหม่ $CE = 85 \text{ mm}$, $BE = 165 - 95 = 70 \text{ mm}$

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$(BC)^2 = (BE)^2 + (CE)^2$$

แทนค่า

$$(BC)^2 = 70^2 + 85^2$$

$$BC = \sqrt{70^2 + 85^2}$$

$$BC = \sqrt{4,900 + 7,225}$$

$$BC = \sqrt{12,125}$$

$$BC = 110.11 \text{ mm}$$

สูตร เส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

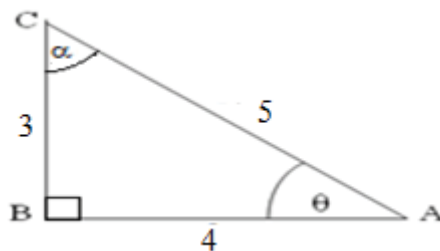
$$P = AB + BC + CD + DA$$

แทนค่า

$$P = 165 + 110.11 + 95 + 85$$

$$P = 455.11 \text{ mm} \quad \text{ตอบ}$$

5. จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้ จงหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของ $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ และ $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$



วิธีทำ

$$\sin \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{3}{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{4}{5}$$

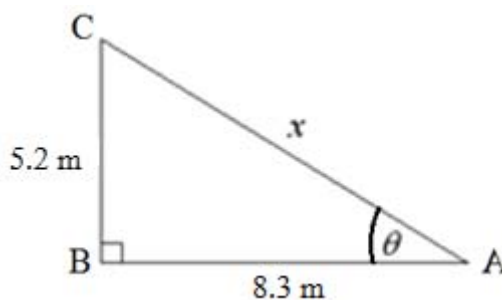
$$\cos \theta = \frac{\text{ด้านประชิดมุม}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{ด้านประชิดมุม}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{3}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านประชิดมุม}} = \frac{3}{4}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านประชิดมุม}} = \frac{4}{3}$$

6. จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้ จงหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของ $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$



วิธีทำ จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

แทนค่า

$$x^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$x^2 = (8.3)^2 + (5.2)^2$$

$$x^2 = 68.89 + 27.04$$

$$x^2 = 95.93$$

$$x = \sqrt{95.93}$$

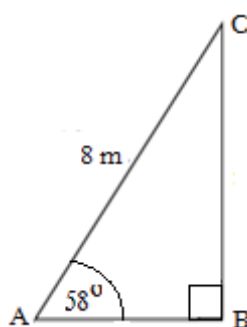
$$x = 9.79 \text{ m}$$

$$\sin \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}\theta}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}\theta} = \frac{5.2}{9.79} \quad \text{ตอบ}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{ด้านประชิดมุม}\theta}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}\theta} = \frac{8.3}{9.79} \quad \text{ตอบ}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}\theta}{\text{ด้านประชิดมุม}\theta} = \frac{5.2}{8.3} \quad \text{ตอบ}$$

7. จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้ มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 8 m จงหาความยาวด้าน BC และด้าน AC โดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ



วิธีทำ

$$\sin \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}\theta}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}\theta} = \frac{BC}{AC}$$

$$AC \sin \theta = BC$$

$$BC = AC \sin \theta$$

แทนค่า

$$BC = (8\text{m}) \sin(58^\circ)$$

$$BC = 6.78 \text{ m} \quad \text{ตอบ}$$

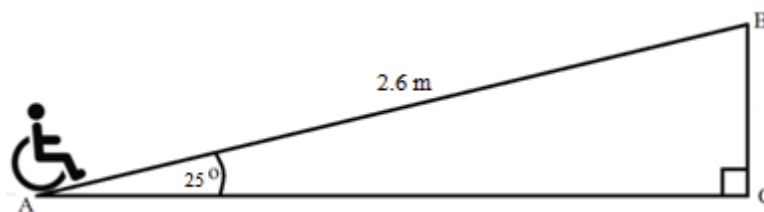
$$\cos \theta = \frac{\text{ด้านประชิดมุม}\theta}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}\theta} = \frac{AB}{AC}$$

$$AC \cos \theta = AB$$

$$AB = (8 \text{ m}) \cos(58^\circ)$$

$$AB = 4.24 \text{ m} \quad \text{ตอบ}$$

8. ต้องการสร้างพื้นเอียงแห่งหนึ่งสำหรับคนพิการที่ใช้รถวีลแชร์ ดังแสดงในรูป โดยพื้นเอียงนี้ยาว 2.6 เมตร และมีมุมลาดเอียง 25° จงหาความสูงของพื้นเอียงและพื้นระนาบยาวเท่าไร



วิธีทำ ต้องการหาความสูงของพื้นเอียงให้ใช้

$$\sin \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{BC}{AB}$$

$$BC = AB \sin \theta$$

แทนค่า $BC = (2.6 \text{ m}) \sin(25^\circ)$

\therefore ความสูงของพื้นเอียง = 1.1 m ตอบ

ต้องการหาความยาวของพื้นระนาบให้ใช้

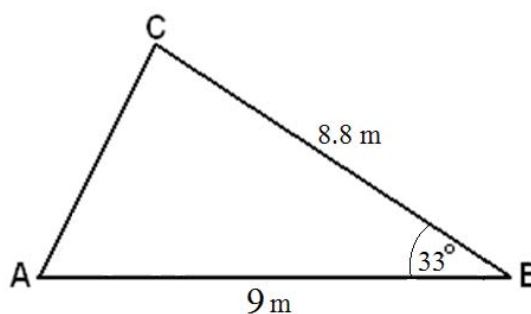
$$\cos \theta = \frac{\text{ด้านประชิดมุม}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{AC}{AB}$$

$$AB \cos \theta = AC$$

$$AC = (2.6 \text{ m}) \cos(25^\circ)$$

$$AC = 2.356 \text{ m} \quad \text{ตอบ}$$

9. สามเหลี่ยม ABC รูปหนึ่ง ด้าน AB = 9 เมตร และด้าน BC = 8.8 เมตร มีมุม $\hat{B} = 33^\circ$ จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC รูปนี้



วิธีทำ

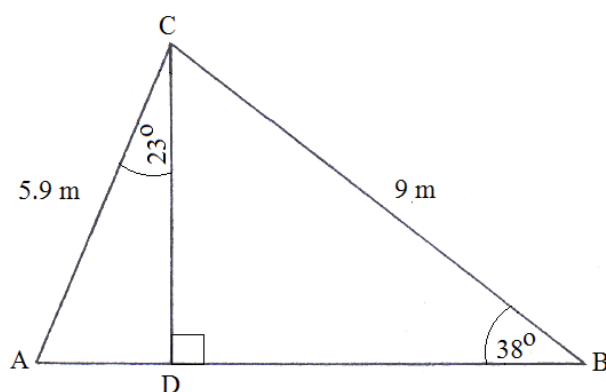
$$\text{พื้นที่ } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times AB \times BC \cdot \sin \beta$$

แทนค่า

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ } \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times 9 \text{ m} \times (8.8 \text{ m}) \sin (33^\circ) \\ &= 21.57 \text{ m} \end{aligned}$$

ตอบ

10. สามเหลี่ยม ABC รูปหนึ่ง ด้าน BC = 9 เมตร และด้าน AC = 5.9 เมตร มีมุม $\angle C = 23^\circ$ และมุม $B = 38^\circ$ จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC รูปนี้



วิธีทำ หาความยาว AD โดยใช้

$$\cos \theta = \frac{\text{ด้านประชิดมุม}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{AD}{AC}$$

$$AD = AC \cos \theta$$

แทนค่า

$$AD = (5.9 \text{ m}) \cos(67^\circ)$$

$$AD = 2.305 \text{ m}$$

หาความยาว BD โดยใช้

$$\cos \theta = \frac{\text{ด้านประชิดมุม}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{BD}{BC}$$

$$BD = BC \cos \theta$$

แทนค่า

$$BD = (9 \text{ m}) \cos(38^\circ)$$

$$BD = 7.09 \text{ m}$$

$$\therefore \text{ฐานของ } \triangle \text{ ยาว} = 2.305 \text{ m} + 7.09 \text{ m} = 9.4 \text{ m}$$

$$\text{พื้นที่ } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times c \times b \cdot \sin \alpha$$

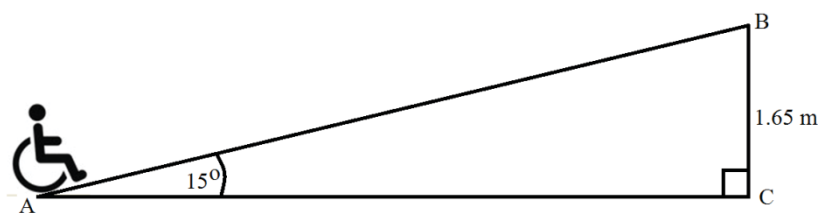
แทนค่า

$$= \frac{1}{2} \times 9.4 \times 5.9 \sin(67^\circ)$$

$$\text{พื้นที่ } \triangle ABC = 25.53 \text{ cm}$$

ตอบ

11. ต้องการสร้างทางลาดเอียงแห่งหนึ่งสำหรับคนพิการที่ใช้รถวีลแชร์ โดยทางลาดเอียงนี้มีความสูง 1.65 เมตร และมีมุมลาดเอียง 15° ทางลาดเอียงนี้将有ความยาวเท่าไร



วิธีทำ ต้องการหาความยาวของทางลาดเอียงให้ใช้

$$\sin \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{BC}{AB}$$

$$AB = \frac{BC}{\sin \theta}$$

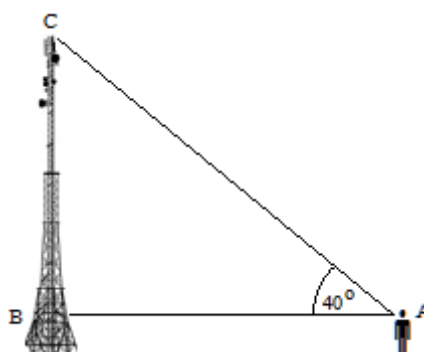
แทนค่า

$$AB = \frac{1.65 \text{ m}}{\sin(15^\circ)}$$

$$\therefore \text{ความยาวของทางลาดเอียง} = 6.375 \text{ m}$$

ตอบ

12. นายเอยืนห่างจากหอ KIRAN เป็นระยะทาง 75 เมตร เขามองไปยังยอดหอโดยทำมุมเงยกับยอดหอเป็นมุม 40° ดังแสดงในรูป จงหาความสูงของหอ ถ้านายเอสูง 1.8 เมตร



วิธีทำ

$$\tan \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านประชิดมุม}} = \frac{BC}{AB}$$

แทนค่า

$$\tan(40^\circ) = \frac{BC}{75}$$

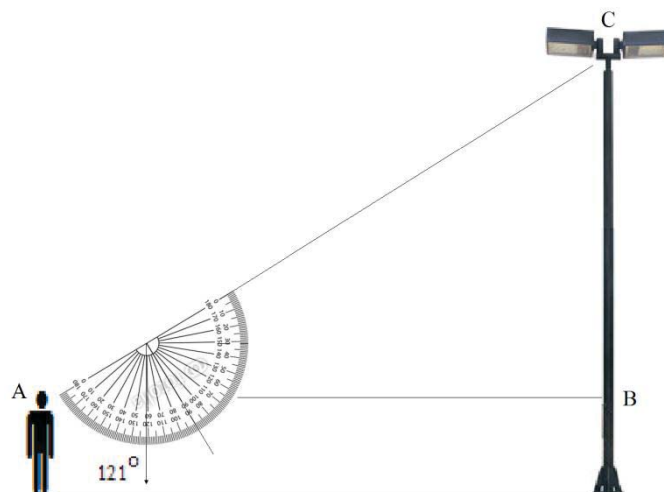
$$BC = 75 \tan(40^\circ)$$

$$BC = 62.93 \text{ m}$$

$$\text{นายเอสูง 1.8 เมตร หอสูง} = 62.93 + 1.8 \approx 64.73 \text{ m}$$

ตอบ

13. นายเอกสูง 170 เซนติเมตร ใช้เครื่องวงกลมย่นเล็งที่ฐานของเครื่องวงกลมไปยังปลายของโคมไฟจนเชือกดิ่งที่เครื่องวงกลมชี้ที่เลข 121° และก้าวเดินไปที่ฐานของโคมไฟได้ 20 ก้าว โคมไฟนี้สูงกี่เมตร (กำหนดให้ 1 ก้าว ≈ 0.75 m)



วิธีทำ เครื่องวงกลมย่นเล็งที่ปลายของโคมไฟจนเชือกดิ่งที่เครื่องวงกลมชี้ที่เลข 121°

$$\therefore \text{มุมเงย} = 121^\circ - 90^\circ = 31^\circ$$

จากจุดวัดมุมเงยเดินไปที่ฐานของโคมไฟได้ 20 ก้าว

$$1 \text{ ก้าว} \approx 0.75 \text{ m}$$

$$\therefore \text{ระยะทางในแนวราบ}(AB) = 20 \times 0.75 \text{ m} = 15 \text{ m}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านประชิดมุม}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\text{แทนค่า} \quad \tan(31^\circ) = \frac{BC}{15 \text{ m}}$$

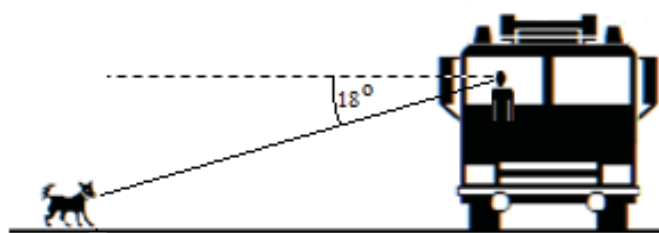
$$BC = (15 \text{ m}) \tan(31^\circ)$$

$$BC = 9.01 \text{ m}$$

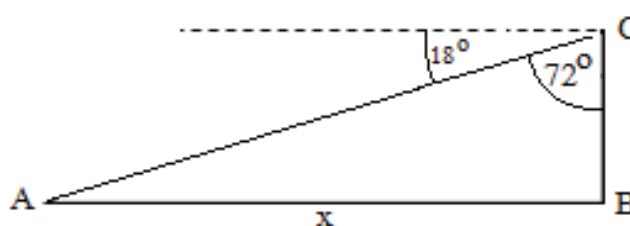
$$\text{นายเอกเล็งที่ความสูง } 170 \text{ cm} = 1.70 \text{ m}$$

$$\therefore \text{โคมไฟนี้สูง} \approx 9.01 + 1.70 \approx 10.71 \text{ m} \quad \text{ตอบ}$$

14. นายเอขับรถอยู่บนรถบัสสูง 2 เมตร และระวางสุนัขที่อยู่ห่างจากรถบัส โดยเขามองไปที่สุนัขด้วยมุมก้ม 18° จงหาว่าสุนัขอยู่ห่างจากรถบัสเท่าไร



วิธีทำ เขียนแผนภาพใหม่เพื่อให้สามารถคำนวณได้ง่าย



แทนค่า

$$\tan \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านประชิดมุม}} = \frac{x}{BC}$$

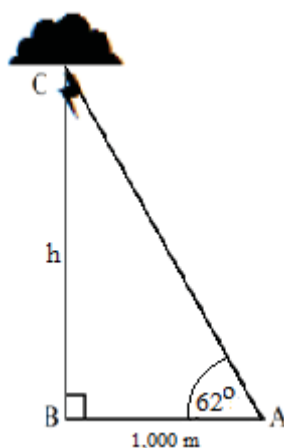
$$\tan(72^\circ) = \frac{x}{2 \text{ m}}$$

$$x = (2 \text{ m}) \tan(72^\circ)$$

$$x \approx 6.16 \text{ m}$$

ตอบ

15. สนามบินแห่งหนึ่งต้องการที่จะทราบระดับความสูงของฐานเมฆระดับชั้นต่ำสุดเมื่อเมฆเริ่มก่อตัว ซึ่งไม่สามารถที่จะวัดระดับความสูงได้โดยตรง จึงได้ฉายแสงจากสปอตไลท์ไปยังฐานเมฆที่ระดับชั้นต่ำสุดเป็นมุมเงย 62° สปอตไลท์อยู่ห่างจากฐานเมฆในแนวราบประมาณ 1,000 m ฐานเมฆจะมีความสูงเท่าไร



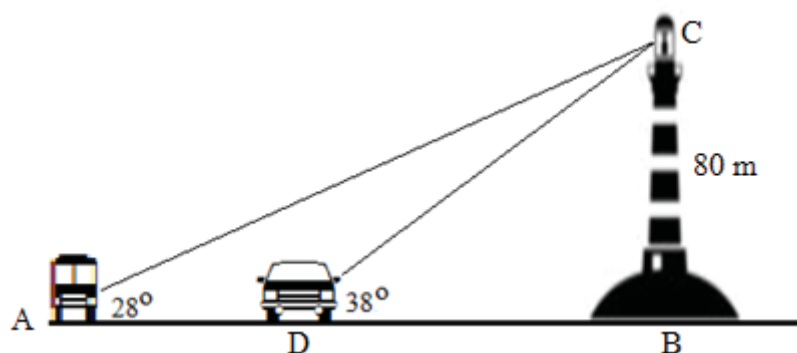
วิธีทำ $\tan \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านประชิดมุม}} = \frac{h}{AB}$

แทนค่า $\tan(62^\circ) = \frac{h}{1,000 \text{ m}}$

$$h = (1,000 \text{ m}) \tan(62^\circ)$$

$$h \approx 1,8880.73 \text{ m} \quad \text{ตอบ}$$

16. เจ้าหน้าที่คนหนึ่งอยู่บนยอดโดมแห่งหนึ่งสูง 80 เมตร มองลงมายังรถยนต์ 2 คันที่อยู่บนแนวเดียวกัน ด้วยมุมก้มเท่ากับ 28° และ 38° รถยนต์ทั้งสองคันห่างกันประมาณกี่เมตร



วิธีทำ รูปสามเหลี่ยม ABC

$$\tan \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านประชิดมุม}} = \frac{BC}{AB}$$

แทนค่า $\tan(28^\circ) = \frac{80}{AB}$

$$AB = \frac{80}{\tan(28^\circ)}$$

$$AB = 150.46 \text{ m}$$

รูปสามเหลี่ยม DBC

$$\tan \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านประชิดมุม}} = \frac{BC}{DB}$$

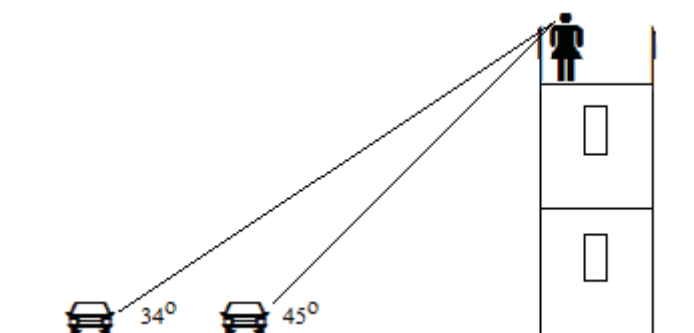
แทนค่า $\tan(38^\circ) = \frac{80}{DB}$

$$DB = \frac{80}{\tan(38^\circ)}$$

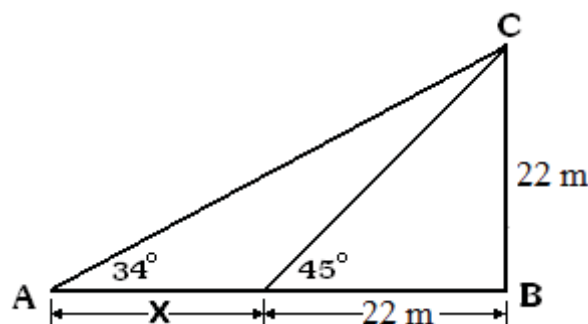
$$DB = 102.4 \text{ m}$$

$$\therefore \text{รถยนต์ทั้งสองคันห่างกัน } 150.46 \text{ m} - 102.4 \text{ m} = 48.06 \text{ m} \quad \text{ตอบ}$$

17. หญิงคนหนึ่งยืนอยู่บนดาดฟ้าตึกหลังหนึ่งสูง 22 เมตร และมองเห็นรถยนต์คันแรกเป็นมุมก้ม 45° และมองเห็นรถยนต์คันที่สองเป็นมุมก้ม 34° ตามลำดับ รถยนต์ 2 คันนี้ห่างกันประมาณกี่เมตร



วิธีทำ เขียนแผนภาพรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใหม่และกำหนดมุม เพื่อสะดวกในการคำนวณตึกสูง 22 m และมุมก้ม 45° ดังนั้นระยะห่างของรถยนต์คันแรกกับตึกจึงเท่ากับ ความสูงของตึก คือเท่ากับ 22 m



$\triangle ABC$

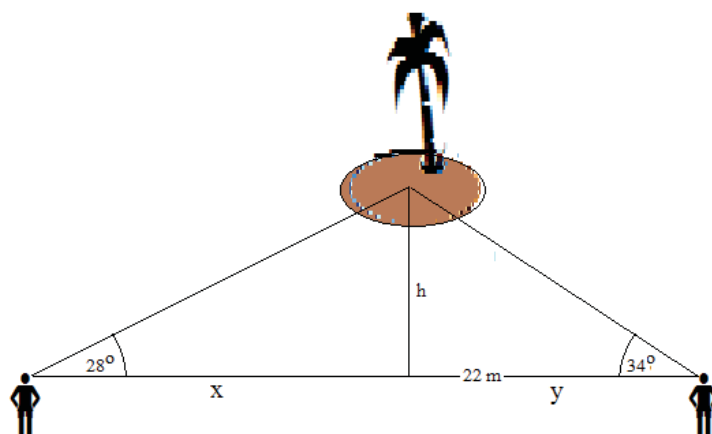
$$\tan \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านประชิดมุม}} = \frac{BC}{AB}$$

แทนค่า

$$\begin{aligned} \tan(34^\circ) &= \frac{22}{x + 22} \\ x + 22 &= \frac{22}{\tan(34^\circ)} \\ x + 22 &= 32.62 \\ x &= 32.62 - 22 \end{aligned}$$

\therefore รถยนต์ 2 คันนี้ห่างกัน ≈ 10.62 m ตอบ

18. วิสวกรสองคนต้องการหาระยะทางของเกาะแห่งหนึ่งกับชายหาด เขาจึงยืนห่างกัน 22 เมตร และมองไปที่กึ่งกลางเกาะเป็นมุมเงย 28° และ 34° ดังแสดงในรูป จงคำนวณหาระยะทางของเกาะแห่งนี้กับชายหาด



วิธีทำ รูปสามเหลี่ยมซ้ายมือ

$$\tan \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านประชิดมุม}} = \frac{h}{x} \quad (1)$$

แทนค่า

$$\tan(28^\circ) = \frac{h}{x}$$

$$h = x \tan(28^\circ)$$

$$h = 0.532x \quad (2)$$

รูปสามเหลี่ยมขวามือ

$$\tan \theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านประชิดมุม}} = \frac{h}{y} \quad (3)$$

แทนค่า

$$\tan(34^\circ) = \frac{h}{y}$$

$$h = y \tan(34^\circ)$$

$$h = 0.675y \quad (4)$$

$$(2) = (4) \quad 0.532x = 0.675y$$

$$x = \frac{0.675y}{0.532} = 1.268y$$

และ

$$x + y = 22$$

แทนค่า

$$1.268y + y = 22$$

$$y = \frac{22}{2.268} = 9.7 \text{ m}$$

$$\therefore x = 22 - 9.7 = 12.3 \text{ m}$$

จาก (2)

$$h = 0.532x$$

$$h = 0.532(12.3 \text{ m}) = 6.55 \text{ m} \quad \text{ตอบ}$$

จาก (4)

$$h = 0.675y$$

$$h = 0.675(9.7 \text{ m}) = 6.55 \text{ m} \quad \text{ตอบ}$$

เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 3 ตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย

1. จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติที่แท้จริงของ $\sin 120^\circ$ โดยใช้วงกลมหนึ่งหน่วย

วิธีทำ

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = y$$

$$\text{พิกัดของมุมเฉพาะเจาะจงบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ } 120^\circ = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ตอบ}$$

2. จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติที่แท้จริงของ $\cos 60^\circ$ โดยใช้วงกลมหนึ่งหน่วย

วิธีทำ

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = x$$

$$\text{พิกัดของมุมเฉพาะเจาะจงบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ } 60^\circ = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{ตอบ}$$

3. จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติที่แท้จริงของ $\tan 120^\circ$ โดยใช้วงกลมหนึ่งหน่วย

วิธีทำ

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\text{พิกัดของมุมเฉพาะเจาะจงบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ } 120^\circ = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$x = -\frac{1}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \tan 120^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \quad \text{ตอบ}$$

4. จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติที่แท้จริงของ $\sec 210^\circ$ โดยใช้วงกลมหนึ่งหน่วย

วิธีทำ

$$\sec \theta = \frac{r}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\text{พิกัดของมุมเฉพาะเจาะจงบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ } 210^\circ = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sec 210^\circ &= \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ \sec 210^\circ &= -\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

5. จงใช้ตารางหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมเฉพาะเจาะจง ดังนี้

$$5.1 \sin 94.7^\circ$$

$$5.2 \cos 91.4^\circ$$

$$5.3 \cos 120.3^\circ$$

$$5.4 \tan 95.8^\circ$$

θ	sin	cos	tan
90	1.0000	0.0000	+ -
91	0.9998	-0.0175	-57.2900
92	0.9994	-0.0349	-28.6363
93	0.9986	-0.0523	-19.0811
94	0.9976	-0.0698	-14.3007
95	0.9962	-0.0872	-11.4301
96	0.9945	-0.1045	-9.5144
120	0.8660	-0.5000	-1.7321
121	0.8572	-0.5150	-1.6643

Deg	θ	sin	cos	tan
90	1.0000	0.0000	+ -	
91	0.9998	-0.0175	-57.2900	
92	0.9994	-0.0349	-28.6363	
93	0.9986	-0.0523	-19.0811	
94	0.9976	-0.0698	-14.3007	
95	0.9962	-0.0872	-11.4301	
96	0.9945	-0.1045	-9.5144	
120	0.8660	-0.5000	-1.7321	
121	0.8572	-0.5150	-1.6643	

วิธีทำ 5.1 จากตารางฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$\sin 94^\circ = 0.9976$$

$$\sin 95^\circ = 0.9962$$

มุม 94 และมุม 95 ต่างกัน 1 องศา และค่า sin ของมุมทั้งสองต่างกัน $0.9976 - 0.9962 = 0.0014$

ดังนั้น

$$1 \text{ องศา} = 0.0014$$

$$0.7 \text{ องศา} = \frac{0.0014 \times 0.7}{1} = 0.00098$$

$$\text{ดังนั้น } \sin 94.7^\circ = 0.9976 + 0.00098 = 0.9986$$

ตอบ

5.2 จากตารางฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$\cos 91^\circ = -0.0175$$

$$\cos 92^\circ = -0.0349$$

มุม 92 และมุม 91 ต่างกัน 1 องศา และค่า cos ของมุมทั้งสองต่างกัน $-0.0349 - (-0.0175) = -0.0174$

ดังนั้น

$$1 \text{ องศา} = -0.0174$$

$$0.4 \text{ องศา} = \frac{-0.0174 \times 0.4}{1} = -0.00696$$

$$\text{ดังนั้น } \cos 91.4^\circ = -0.0175 + (-0.00696) = -0.0245$$

ตอบ

5.3 จากตารางฟังก์ชันตรีโกณมิติ $\cos 120^\circ = -0.5000$

$$\cos 121^\circ = -0.5150$$

มุม 120 และมุม 121 ต่างกัน 1 องศา และค่า \cos ของมุมทั้งสองต่างกัน $-0.5150 - (-0.5000) = -0.015$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad 1 \text{ องศา} &= -0.015 \\ 0.3 \text{ องศา} &= \frac{-0.015 \times 0.3}{1} = -0.0045 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \cos 120.3^\circ = -0.5000 + (-0.0045) = -0.5045 \quad \text{ตอบ}$$

5.4 จากตารางฟังก์ชันตรีโกณมิติ $\tan 95^\circ = -11.4321$

$$\tan 96^\circ = -9.5144$$

มุม 96 และมุม 95 ต่างกัน 1 องศา และค่า \tan ของมุมทั้งสองต่างกัน $-9.5144 - (-11.4321) = 1.9177$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad 1 \text{ องศา} &= 1.9177 \\ 0.8 \text{ องศา} &= \frac{1.9177 \times 0.8}{1} = 1.5342 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \tan 95.8^\circ = -11.4321 + 1.5342 = -9.8979 \quad \text{ตอบ}$$

6. ถ้า $\sin \theta = \frac{3}{4}$ และ $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ให้หาค่าของ $\cos \theta$ และ $\tan \theta$

วิธีทำ ซึ่งมุม θ มีค่ามากกว่า 90° แต่น้อยกว่า 180° แสดงว่าด้านที่ตัดกันบนวงกลมอยู่ในควอดรันต์ที่ 2

สมบัติของพีทาโกรัส $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

แทนค่า $\sin \theta = \frac{3}{4}$ $\cos^2 \theta + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1$

$$\cos^2 \theta + \frac{9}{16} = 1$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{9}{16}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{7}{16}$$

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{7}{16}}$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

มุม θ อยู่ในควอดรันต์ที่ 2

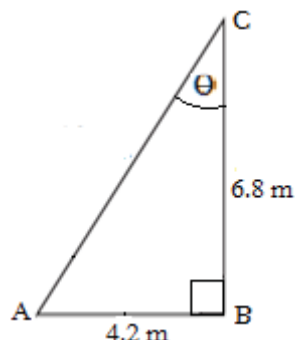
$$\therefore \cos \theta = -\frac{\sqrt{7}}{4} \quad \text{ตอบ}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{3}{4} \left(-\frac{4}{\sqrt{7}}\right)$$

$$\tan \theta = -\frac{3}{\sqrt{7}} \quad \text{ตอบ}$$

7. รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีขนาดดังแสดงในรูป จงหาขนาดของมุม θ โดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ



วิธีทำ

$$\theta = \arctan \left[\frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}}{\text{ด้านประชิดมุม}} \right] = \arctan \left(\frac{AB}{BC} \right)$$

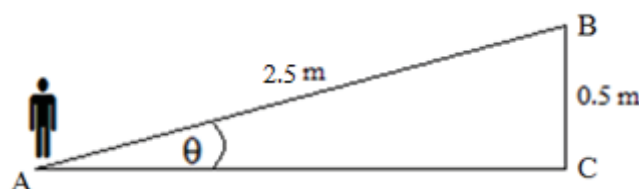
แทนค่า

$$\theta = \arctan \left(\frac{4.2 \text{ m}}{6.8 \text{ m}} \right)$$

$$\theta = 31.70^\circ$$

ตอบ

8. ช่างก่อสร้างนำไม้กระดานยาว 2.5 เมตรมาวางพาดขอบบันไดสูง 0.5 เมตร เพื่อเดินขึ้นดื่งที่กำลังก่อสร้าง
จงหามุมที่ไม้กระดานพาดบันไดกับพื้นราบ ดังแสดงในรูป



วิธีทำ

$$\sin \theta = \left[\frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม}\theta}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} \right] = \left(\frac{a}{b} \right)$$

แทนค่า

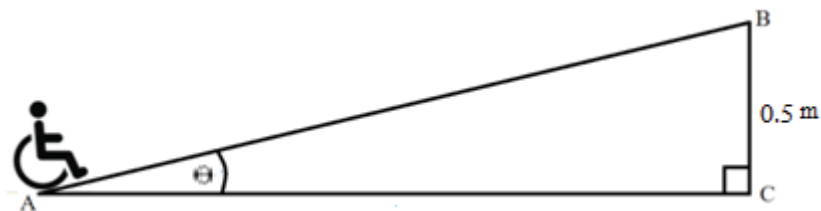
$$\sin \theta = \left(\frac{0.5 \text{ m}}{2.5 \text{ m}} \right)$$

$$\sin \theta = 0.2$$

จากตารางฟังก์ชันตรีโกณมิติตรงค่า $\sin \theta = 0.2$ ตรงกับมุม 12°

ตอบ

9. ต้องการสร้างทางลาดแห่งหนึ่งสำหรับคนพิการที่ใช้รถวีลแชร์ให้ได้มาตรฐานอัตราส่วนทางลาด 1 : 12 โดยทางลาดนี้มีความสูง 0.5 m จงหาความยาวทางลาดนี้



วิธีทำ มาตรฐานอัตราส่วนทางลาดสูง : ยาว = 1 : 12 และทางลาดสูง 0.5 m

$$\therefore \quad 1 \times 0.5 : 12 \times 0.5$$

$$0.5 : 6$$

$$\therefore \quad \text{ความยาว} = 6 \text{ m} \quad \text{ตอบ}$$

ต้องการหาความยาวของทางลาดให้ใช้จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$$

แทนค่า $(AB)^2 = (9.6)^2 + (0.8)^2$

$$(AB)^2 = 92.16 + 0.64$$

$$(AB)^2 = 92.8$$

$$AB = \sqrt{92.8}$$

$$\therefore \quad \text{ทางลาดยาว} \quad AB = 9.63 \text{ m} \quad \text{ตอบ}$$

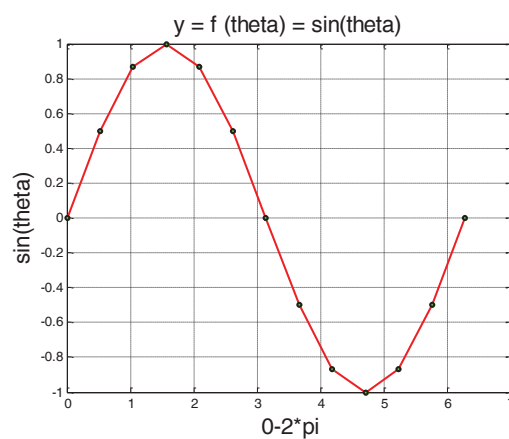
10. จงเขียนกราฟ $y = \sin \theta$ ด้วยมุม เมื่อ $0 < \theta < 2\pi$

ด้วยมุม $\theta = [0 \ 30 \ 60 \ 90 \ 120 \ 150 \ 180 \ 210 \ 240 \ 270 \ 300 \ 330 \ 360]$

วิธีทำ กำหนดค่า θ และหาค่า y บางจุดที่กราฟผ่านจาก $y = \sin \theta$

θ	$y = \sin \theta$	θ	$y = \sin \theta$
0°	0	180°	0
30°	0.5	210°	-0.5
60°	0.87	240°	-0.87
90°	1	270°	-1
120°	0.87	300°	-0.87
150°	0.5	330°	-0.5
		360°	0

นำคู่อันดับ θ, y มาเขียนกราฟได้ดังนี้



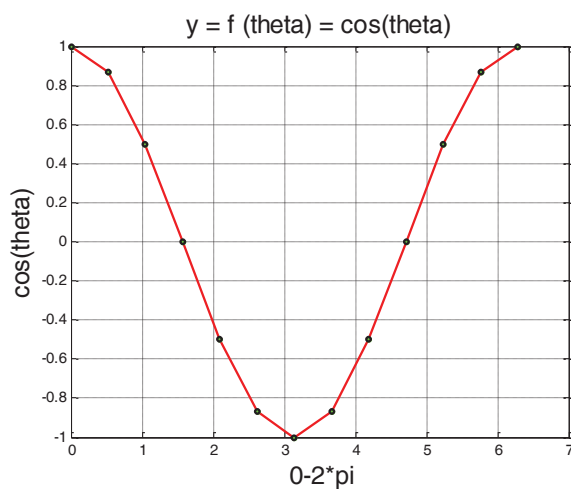
11. จงเขียนกราฟ $y = \cos \theta$ เมื่อ $0 < \theta < 2\pi$

ด้วยมุม $\theta = [0 \ 30 \ 60 \ 90 \ 120 \ 150 \ 180 \ 210 \ 240 \ 270 \ 300 \ 330 \ 360]$

วิธีทำ กำหนดค่า θ และหาค่า y บางจุดที่กราฟผ่านจาก $y = \cos \theta$

θ	$y = \cos \theta$	θ	$y = \cos \theta$
0°	1	180°	-1
30°	0.87	210°	-0.87
60°	0.5	240°	-0.5
90°	0	270°	0
120°	-0.5	300°	0.5
150°	-0.87	330°	0.87
		360°	1

นำคู่อันดับ θ, y มาเขียนกราฟได้ดังนี้



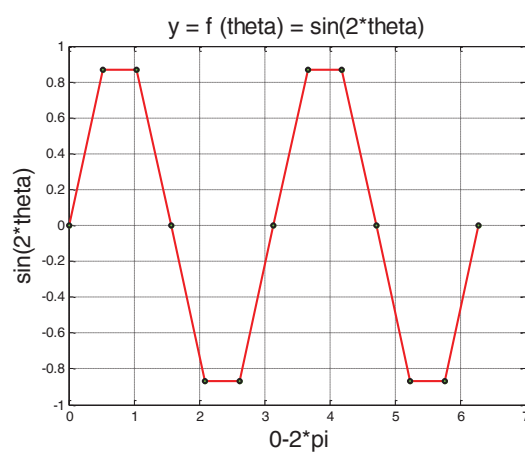
12. จงเขียนกราฟ $y = \sin 2\theta$ เมื่อ $0 < \theta < 2\pi$

ด้วยมุม $\theta = [0 \ 30 \ 60 \ 90 \ 120 \ 150 \ 180 \ 210 \ 240 \ 270 \ 300 \ 330 \ 360]$

วิธีทำ กำหนดค่า θ และหาค่า y บางจุดที่กราฟผ่านจาก $y = \sin 2\theta$

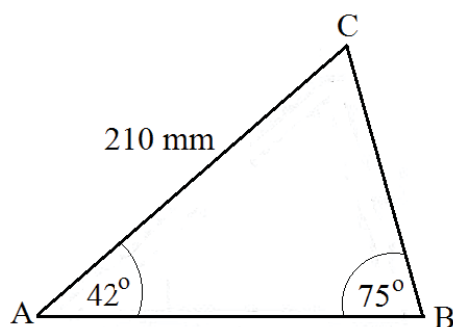
θ	$y = \sin 2\theta$	θ	$y = \sin 2\theta$
0°	0	180°	0
30°	0.87	210°	0.87
60°	0.87	240°	0.87
90°	0	270°	0
120°	-0.87	300°	-0.87
150°	-0.87	330°	-0.87
		360°	0

นำคู่อันดับ θ, y มาเขียนกราฟได้ดังนี้



เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 4 กฎของไซน์และโคไซน์

1. สามเหลี่ยม ABC รูปหนึ่ง มีขนาดดังรูป จงคำนวณหาความยาวด้าน BC โดยใช้กฎของไซน์



วิธีทำ ใช้กฎของไซน์ด้าน a และด้าน b

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

แทนค่า

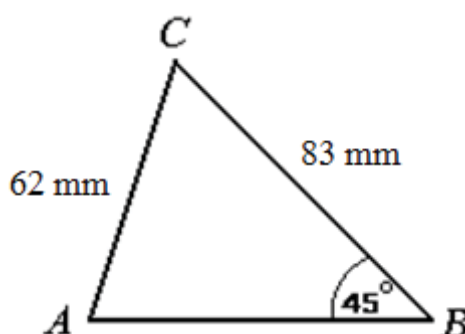
$$\frac{BC}{\sin(42^\circ)} = \frac{210 \text{ mm}}{\sin(75^\circ)}$$

$$BC = \frac{210 \text{ mm}(\sin(42^\circ))}{\sin(75^\circ)}$$

$$BC = 145.47 \text{ mm}$$

ตอบ

2. สามเหลี่ยม ABC รูปหนึ่ง มีขนาดดังรูป จงคำนวณหาความยาวด้าน AB โดยใช้กฎของไซน์



วิธีทำ ใช้กฎของไซน์ด้าน a และด้าน b

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

แทนค่า

$$\frac{83 \text{ mm}}{\sin A} = \frac{62 \text{ mm}}{\sin(45^\circ)}$$

$$\sin A = \frac{83 \text{ mm}(\sin(45^\circ))}{62 \text{ mm}}$$

$$\sin A = 0.947$$

$$A = \sin^{-1}(0.947)$$

$$\angle A = 71.26^\circ$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - 71.26^\circ - 45^\circ = 63.74^\circ$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

แทนค่า

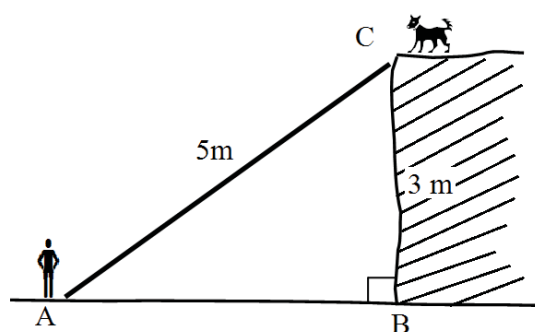
$$\frac{62 \text{ mm}}{\sin(45^\circ)} = \frac{c}{\sin(63.74^\circ)}$$

$$AB = \frac{(62 \text{ mm})\sin(63.74^\circ)}{\sin(45^\circ)}$$

$$AB = 78.63 \text{ mm}$$

ตอบ

3. ชายคนหนึ่งต้องการช่วยสุนัขที่ติดอยู่บนหน้าผาชันสูงประมาณ 3 m เขาจึงใช้บันไดยาว 5 m พาดบนหน้าผา เขาจะต้องพาดบันไดให้ฐานบันไดกว้างเท่าไร หับบันไดจึงจะพาดบนหน้าผาพอดี



วิธีทำ ใช้กฎของไซน์กับ $\triangle ACB$ ด้าน AC และด้าน BC

แทนค่า

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin \beta}$$

$$\frac{3 \text{ m}}{\sin \alpha} = \frac{5 \text{ m}}{\sin(90^\circ)}$$

$$\sin \alpha = \frac{3 \text{ m}(\sin(90^\circ))}{5 \text{ m}}$$

$$\sin \alpha = 0.6$$

$$\alpha = \sin^{-1}(0.6)$$

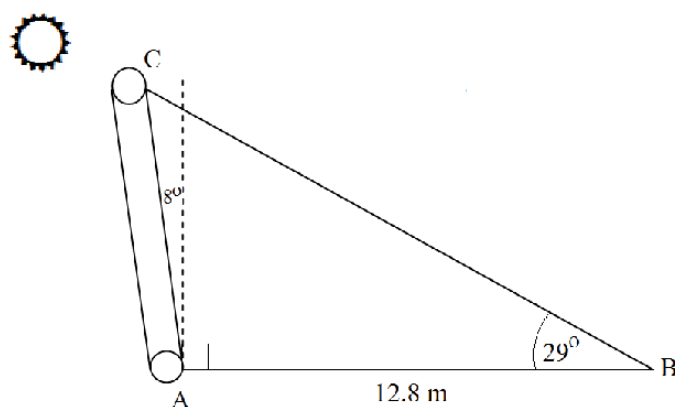
$$\therefore \angle A = 36.87^\circ$$

$$\therefore \angle C = 90^\circ - 36.87^\circ = 53.13^\circ$$

ใช้กฎของไซน์กับ $\triangle ACB$ ด้าน AC และด้าน AB

$$\begin{aligned} \frac{AC}{\sin \beta} &= \frac{AB}{\sin C} \\ \frac{5 \text{ m}}{\sin(90^\circ)} &= \frac{AB}{\sin(53.13^\circ)} \\ AB &= \frac{5 \text{ m}(\sin 53.13^\circ)}{\sin(90^\circ)} \\ \text{ฐานบันไดกว้าง} &\approx 4 \text{ m} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

4. เสาต้นหนึ่งปักอยู่บนดินเอียงจากแนวดิ่งประมาณ 8° และมีแสงแดดจากดวงอาทิตย์ส่องไปยังเสาจนเกิดเงาทำมุม 29° และยาว 12.8 เมตร จงหาว่าเสาต้นนี้ยาวเท่าไร



วิธีทำ

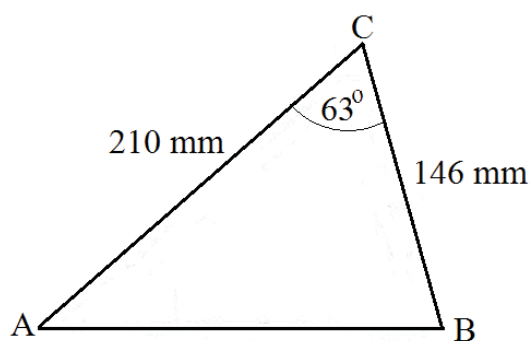
$$\angle A = 90^\circ + 8^\circ = 98^\circ$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - (98^\circ + 29^\circ) = 53^\circ$$

ใช้กฎของไซน์ด้าน b และด้าน c

$$\begin{aligned} \frac{b}{\sin \beta} &= \frac{c}{\sin \gamma} \\ \frac{b}{\sin(29^\circ)} &= \frac{12.8 \text{ m}}{\sin(53^\circ)} \\ b &= \frac{(12.8 \text{ m})\sin(29^\circ)}{\sin(53^\circ)} \\ \text{เสาต้นนี้ยาว} &\approx 7.77 \text{ m} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

5. สามเหลี่ยม ABC รูปหนึ่ง มีขนาดดังรูป จงคำนวณหาความยาวด้าน AB โดยใช้กฎของโคไซน์



วิธีทำ จากกฎของโคไซน์หาความยาวด้าน AB

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)}$$

แทนค่า

$$c = \sqrt{146^2 + 210^2 - 2(146)(210)\cos(63^\circ)}$$

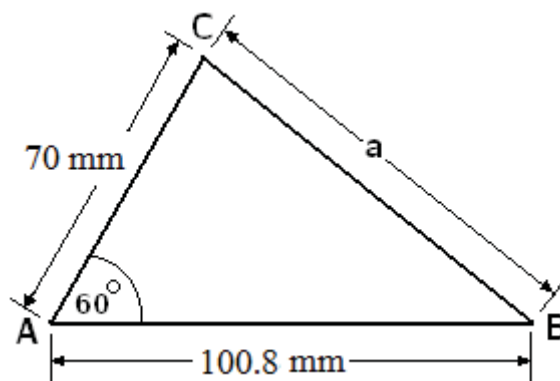
$$c = \sqrt{65,416 - 27,838.7}$$

$$c = \sqrt{37,307.3}$$

$$c = 193.15 \text{ mm}$$

ตอบ

6. สามเหลี่ยม ABC รูปหนึ่ง มีขนาดดังรูป จงคำนวณหาความยาวด้าน BC โดยใช้กฎของโคไซน์



วิธีทำ จากกฎของโคไซน์หาความยาวด้าน AB

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$$

แทนค่า

$$a = \sqrt{70^2 + 100.8^2 - 2(70)(100.8)\cos(60^\circ)}$$

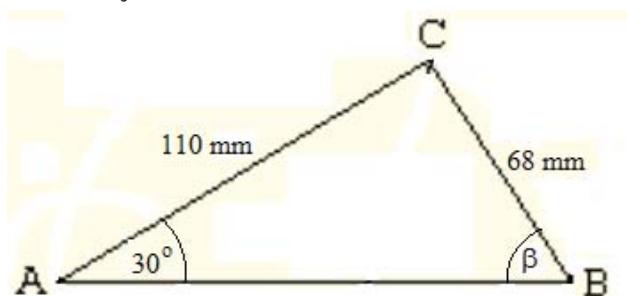
$$a = \sqrt{15,060.64 - 7,056}$$

$$a = \sqrt{8,004.64}$$

$$a = 89.47 \text{ mm}$$

ตอบ

7. สามเหลี่ยม ABC มีขนาดดังรูป ด้าน BC = 68 มิลลิเมตร ด้าน AC = 110 มิลลิเมตร มีมุม $\widehat{CAB} = 30^\circ$ จงหาความยาวของฐานสามเหลี่ยม ABC รูปนี้



วิธีทำ ใช้กฎของไซน์ด้าน a และด้าน b เพื่อหามุม ABC

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin \alpha} &= \frac{b}{\sin \beta} \\ \text{หรือ} \quad \frac{\sin \alpha}{a} &= \frac{\sin \beta}{b} \\ \text{แทนค่า} \quad \frac{\sin(30^\circ)}{68 \text{ mm}} &= \frac{\sin \beta}{110 \text{ mm}} \\ \sin \beta &= \frac{110 \text{ mm}(\sin(30^\circ))}{68 \text{ mm}} \\ \beta &= \sin^{-1}(0.81) \\ \beta &= 54^\circ \end{aligned}$$

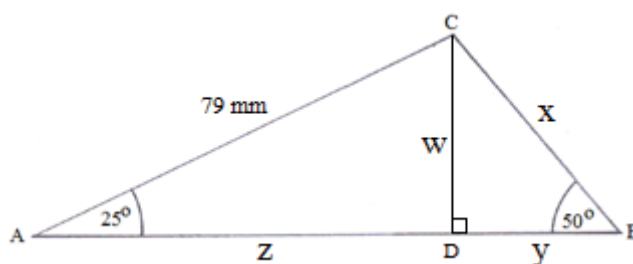
$$\text{มุม } ACB = 180^\circ - 54^\circ - 30^\circ = 96^\circ$$

จากกฎของโคไซน์หาความยาวฐานสามเหลี่ยมคือด้าน AB

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \\ c &= \sqrt{68^2 + 110^2 - 2(68)(110)\cos(96^\circ)} \\ AB &= \sqrt{16,724 - (-1,563.75)} \\ AB &= \sqrt{18,287.75} \\ AB &= 135.23 \text{ mm} \end{aligned}$$

ตอบ

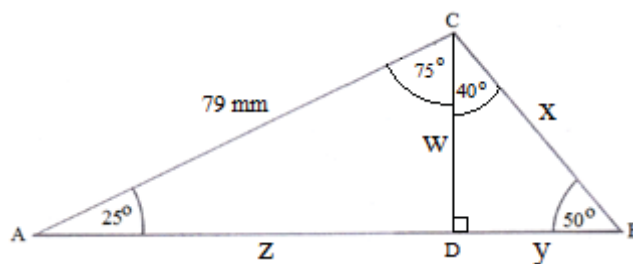
8. สามเหลี่ยม ABC รูปหนึ่ง มีมุม $\widehat{A} = 25^\circ$ มุม $\widehat{B} = 50^\circ$ และด้าน AC ยาว 79 มิลลิเมตร จงหาความยาวของด้าน w, x, y และ z



วิธีทำ

$$\text{จากรูป มุม } ACD = 180^\circ - 25^\circ - 90^\circ = 75^\circ$$

$$\text{จากรูป มุม } BCD = 180^\circ - 50^\circ - 90^\circ = 40^\circ$$

ใช้กฎของไซน์กับ $\triangle ACD$ ด้าน AC และด้าน w

$$\begin{aligned} \frac{AC}{\sin(90^\circ)} &= \frac{w}{\sin(25^\circ)} \\ \frac{75 \text{ mm}}{\sin(90^\circ)} &= \frac{w}{\sin(25^\circ)} \\ w &= \frac{75 \text{ mm}(\sin(25^\circ))}{\sin(90^\circ)} \\ w &= 31.7 \text{ mm} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

ด้าน AC และด้าน z

$$\begin{aligned} \frac{AC}{\sin(90^\circ)} &= \frac{z}{\sin(75^\circ)} \\ \frac{75 \text{ mm}}{\sin(90^\circ)} &= \frac{z}{\sin(75^\circ)} \\ z &= \frac{75 \text{ mm}(\sin(75^\circ))}{\sin(90^\circ)} \\ z &= 72.44 \text{ mm} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

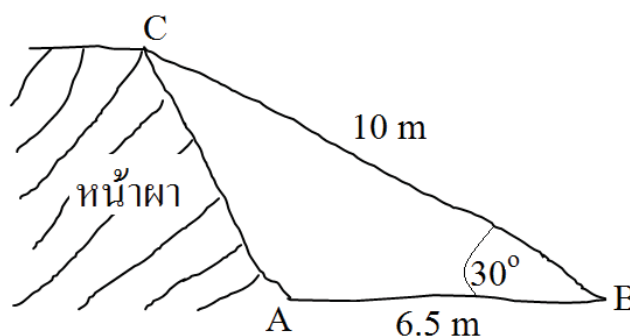
แทนค่า

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sin(90^\circ)} &= \frac{w}{\sin(50^\circ)} \\ \frac{x}{\sin(90^\circ)} &= \frac{31.7 \text{ mm}}{\sin(50^\circ)} \\ x &= \frac{31.7 \text{ mm}(\sin(90^\circ))}{\sin(50^\circ)} \\ x &= 41.38 \text{ mm} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

ด้าน x และด้าน y

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sin(90^\circ)} &= \frac{y}{\sin(40^\circ)} \\ \frac{41.38 \text{ mm}}{\sin(90^\circ)} &= \frac{y}{\sin(40^\circ)} \\ y &= \frac{41.38 \text{ mm}(\sin(40^\circ))}{\sin(90^\circ)} \\ y &= 26.6 \text{ mm} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

9. ในการข้ามหน้าผาหนึ่ง ได้สร้างสะพานข้ามมีความยาวประมาณ 10 เมตรและความยาวทางราบประมาณ 6.5 เมตร สะพานวางเอียงประมาณ 30° กับพื้นราบ หน้าผานี้จะมีความยาวประมาณเท่าไร



วิธีทำ จากรูปใช้กฎของโคไซน์เพื่อหาความยาวของหน้าผา

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta}$$

แทนค่า

$$AC = \sqrt{10^2 + 6.5^2 - 2(10)(6.5)\cos(30^\circ)}$$

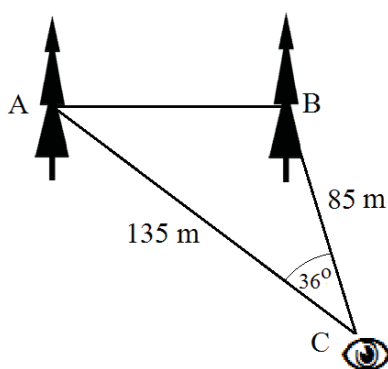
$$AC = \sqrt{142.25 - 112.58}$$

$$AC = \sqrt{29.67}$$

\therefore หน้าผานี้นยาว $AC \approx 5.45$ m

ตอบ

10. ช่างสำรวจสองกล้องสำรวจที่ต้นไม้ต้นแรกมีระยะทาง 85 เมตร และส่งกล้องสำรวจไปที่ต้นไม้ต้นที่สองด้วยมุม 36° มีระยะทาง 135 เมตร จงหาว่าต้นไม้ทั้งสองห่างกันมีระยะทางเท่าไร



วิธีทำ จากรูปใช้กฎของโคไซน์เพื่อหาว่าต้นไม้ทั้งสองห่างกันมีระยะทางเท่าไร

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$$

แทนค่า

$$c = \sqrt{85^2 + 135^2 - 2(85)(135)\cos(36^\circ)}$$

$$c = \sqrt{25,450 - 18,566.94}$$

$$c = \sqrt{6,883.06}$$

∴ ต้นไม้ทั้งสองห่างกัน $AB \approx 82.96 \text{ m}$ ตอบ

เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 5 จำนวนเชิงซ้อน

จงแสดงวิธีการคำนวณ

1. จงบวกและลบจำนวนเชิงซ้อนของ z_1, z_2

$$z_1 = 5 + i6$$

$$z_2 = 6 - i5$$

วิธีทำ

$$z_1 + z_2 = (5 + i6) + (6 - i5)$$

$$= (5 + 6) + i(6 - 5)$$

$$= 11 + i$$

ตอบ

$$z_1 - z_2 = (5 + i6) - (6 - i5)$$

$$= (5 - 6) + i(6 + 5)$$

$$= -1 + i11$$

ตอบ

2. จงบวกและลบจำนวนเชิงซ้อนของ z_1, z_2

$$z_1 = -7 - i2$$

$$z_2 = 4 + i5$$

วิธีทำ

$$z_1 + z_2 = (-7 - i2) + (4 + i5)$$

$$= (-7 + 4) + i(-2 + 5)$$

$$= -3 + i3$$

ตอบ

$$z_1 - z_2 = (-7 - i2) - (4 + i5)$$

$$= (-7 - 4) + i(-2 - 5)$$

$$= -11 - i7$$

ตอบ

3. จงบวกและลบจำนวนเชิงซ้อนของ z_1, z_2

$$z_1 = 7$$

$$z_2 = 5 + i2$$

วิธีทำ

$$z_1 + z_2 = (7) + (5 + i2)$$

$$= (7 + 5) + i2$$

$$= 12 + i2$$

ตอบ

$$z_1 - z_2 = (7) - (5 + i2)$$

$$= (7 - 5) - i2$$

$$= 2 - i2$$

ตอบ

4. จงบวกและลบจำนวนเชิงซ้อนของ z_1, z_2

$$z_1 = 7 + i12$$

$$z_2 = -5$$

วิธีทำ

$$z_1 + z_2 = (7 + i12) + (-5)$$

$$= (7 - 5) + i12$$

$$= 2 + i12$$

ตอบ

$$z_1 - z_2 = (7 + i12) - (-5)$$

$$= (7 + 5) + i12$$

$$= 12 + i12$$

ตอบ

5. จงคูณจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้สูตรของ z_1, z_2

$$z_1 = 5 + i3$$

$$z_2 = 4 - i4$$

วิธีทำ

$$(a \pm ib)(c \pm id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (5 + i3)(4 - i4) &= [(5)(4) - (3)(-4)] + i[(3)(4) + (5)(-4)] \\ &= (20 + 12) + i(12 - 20) \\ &= 32 - i8 \end{aligned}$$

ตอบ

6. จงคูณจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้สูตรของ z_1, z_2

$$z_1 = 3 + i3$$

$$z_2 = 5 - i4$$

วิธีทำ

$$(a \pm ib)(c \pm id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (3 + i3)(5 - i4) &= [(3)(5) - (3)(-4)] + i[(3)(5) + (3)(-4)] \\ &= (15 + 12) + i(15 - 12) \\ &= 27 + i3 \end{aligned}$$

ตอบ

7. จงคูณจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้สูตรของ z_1, z_2

$$z_1 = 5 + i7$$

$$z_2 = 2 + i4$$

วิธีทำ

จากสมการที่ (6.3) $(a \pm ib)(c \pm id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (5 + i7)(2 + i4) &= [(5)(2) - (7)(4)] + i[(7)(2) + (5)(4)] \\ &= (10 - 28) + i(14 + 20) \\ &= -18 + i34 \end{aligned}$$

ตอบ

8. จงคูณจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้สูตรของ z_1, z_2

$$z_1 = 6 - i8$$

$$z_2 = 4 + i2$$

วิธีทำ $(a \pm ib)(c \pm id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (6 - i8)(4 + i2) &= [(6)(4) - (-8)(2)] + i[(-8)(4) + (6)(2)] \\ &= (24 + 16) + i(-32 + 12) \\ &= 40 - i20 \end{aligned}$$

ตอบ

9. จงคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วยวิธีกระจายของ z_1, z_2

$$z_1 = 6 + i8$$

$$z_2 = 7 + i2$$

วิธีทำ $z_1 z_2 = (6 + i8)(7 + i2)$

$$\begin{aligned} &= (6)(7) + (6)(i2) + (i8)(7) + (i8)(i2) \\ &= 42 + i12 + i56 + i^2 16 \\ &= 42 + i68 + (-1)16 \\ &= 42 + i68 - 16 \\ &= 26 + i68 \end{aligned}$$

ตอบ

10. จงคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วยวิธีกระจายของ z_1, z_2

$$z_1 = 1 - i4$$

$$z_2 = 3 + i5$$

วิธีทำ $z_1 z_2 = (1 - i4)(3 + i5)$

$$\begin{aligned} &= (1)(3) + (1)(i5) + (-i4)(3) + (-i4)(i5) \\ &= 3 + i5 - i12 - i^2 20 \\ &= 3 - i7 - (-1)20 \\ &= 3 - i7 + 20 \\ &= 23 - i7 \end{aligned}$$

ตอบ

11. จงคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วยวิธีกระจายของ z_1, z_2

$$z_1 = -4 - i6$$

$$z_2 = 2 - i$$

วิธีทำ $z_1 z_2 = (-4 - i6)(2 - i) = (-4)(2) + (-4)(-i) + (-i6)(2) + (-i6)(-i)$

$$= -8 + i4 - i12 + i^2 6$$

$$= -8 - i8 + (-1)6$$

$$= -14 - i8$$

ตอบ

12. จงหารจำนวนเชิงซ้อนด้วยสังยุคของ z_1, z_2

$$z_1 = 5 + i3$$

$$z_2 = 4 - i4$$

วิธีทำ

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+ib)}{(c+id)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \left[\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(5+i3)}{(4-i4)} = \frac{(5 \times 4) + (3 \times -4)}{4^2 + (-4)^2} + i \left[\frac{(3 \times 4) - (5 \times -4)}{4^2 + (-4)^2} \right]$$

$$= \frac{20-12}{16+16} + i \left[\frac{12+20}{16+16} \right]$$

$$= \frac{8}{32} + i \left[\frac{32}{32} \right]$$

$$= 0.25 + i$$

ตอบ

13. จงหารจำนวนเชิงซ้อนด้วยสัญกของ z_1, z_2

$$z_1 = 3 + i3$$

$$z_2 = 5 - i4$$

วิธีทำ

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+ib)}{(c+id)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \left[\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3 + i3)}{(5 - i4)} = \frac{(3 \times 5) + (3 \times -4)}{5^2 + (-4)^2} + i \left[\frac{(3 \times 5) - (3 \times -4)}{5^2 + (-4)^2} \right]$$

$$= \frac{15-12}{25+16} + i \left[\frac{15+12}{25+16} \right]$$

$$= \frac{3}{41} + i \left[\frac{27}{41} \right]$$

$$= 0.073 + i0.66$$

ตอบ

14. จงหารจำนวนเชิงซ้อนด้วยสัญกของ z_1, z_2

$$z_1 = 5 + i7$$

$$z_2 = 2 + i4$$

วิธีทำ

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+ib)}{(c+id)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \left[\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(5 + i7)}{(2 + i4)} = \frac{(5 \times 2) + (7 \times 4)}{2^2 + 4^2} + i \left[\frac{(7 \times 2) - (5 \times 4)}{2^2 + 4^2} \right]$$

$$= \frac{10+28}{4+16} + i \left[\frac{14-20}{4+16} \right]$$

$$= \frac{38}{20} + i \left[\frac{-6}{20} \right]$$

$$= 1.9 - i0.3$$

ตอบ

15. จงหารจำนวนเชิงซ้อนด้วยวิธีเศษส่วนของ z_1, z_2

$$z_1 = 6 + i8$$

$$z_2 = 7 + i2$$

วิธีทำ

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac - iad + ibc - i^2 bd}{c^2 + d^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(6+i8)}{(7+i2)} = \frac{(6 \times 7) - i(6 \times 2) + i(8 \times 7) - i^2(8 \times 2)}{7^2 + 2^2}$$

$$= \frac{42 - i12 + i56 - (-1)16}{49 + 4}$$

$$= \frac{42 - i12 + i56 + 16}{53}$$

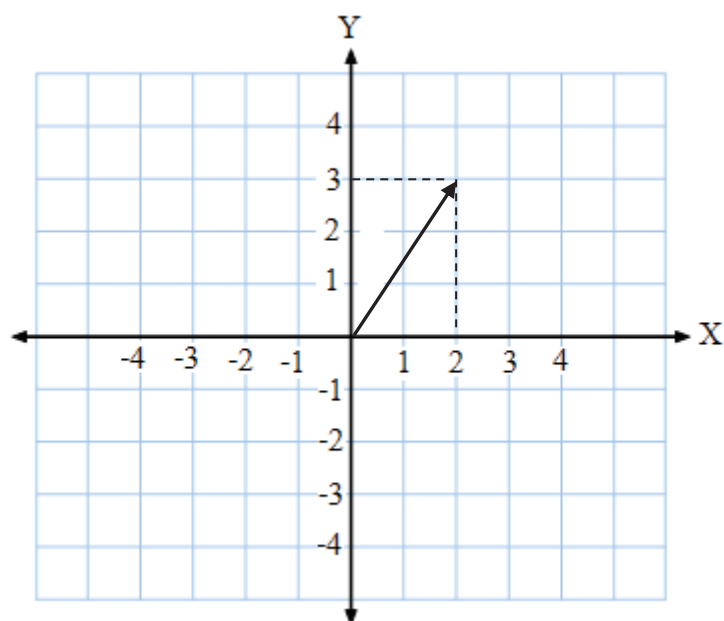
$$= \frac{58}{53} + i \left[\frac{44}{53} \right]$$

$$= 1.09 - i0.83$$

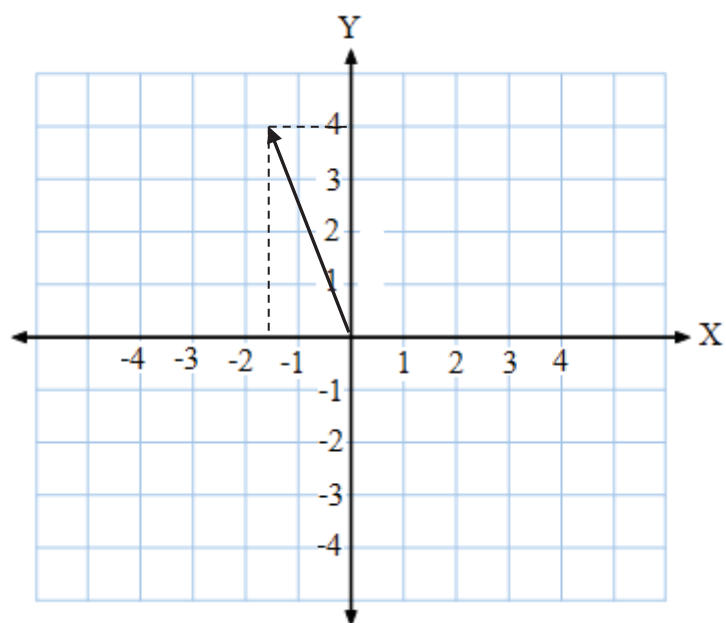
ตอบ

16. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนในข้อต่อไปนี้เป็นเวกเตอร์บนระนาบเชิงซ้อนเดียวกัน

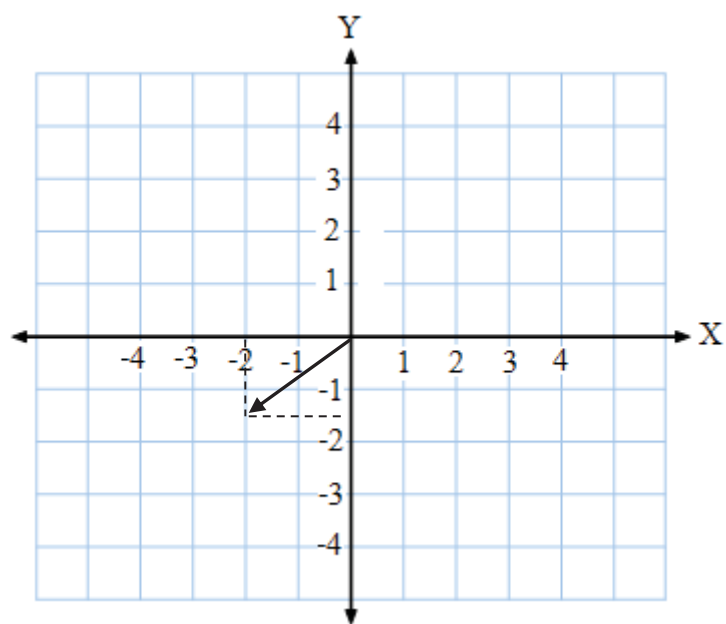
1. $z_1 = 2 + i3$



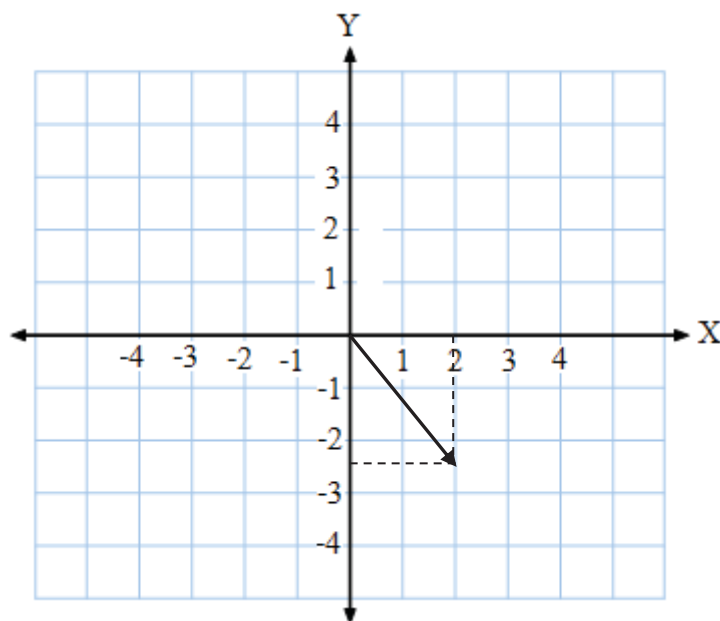
2. $z_2 = -1.5 + i4$



3. $z_3 = -2 - i1.5$



4. $z_4 = 2 - i2.5$



17. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z = -4 - i6$ ในรูปเชิงขั้วและมุมเป็นเรเดียน

วิธีทำ รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน $z = -4 - i6$

หาค่า r จากสมการที่ (5.9)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

แทนค่า

$$r = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2}$$

$$r = \sqrt{16 + 36}$$

$$r = \sqrt{52}$$

หาค่า θ จากสมการที่ (5.11)

$$\tan \theta = \left(\frac{y}{x} \right)$$

แทนค่า

$$\tan \theta = \left(\frac{36}{16} \right)$$

$$\tan \theta = 1.153$$

แต่ $-4 - i6$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 3

จากตารางฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตรงช่อง \tan จะเห็นว่า $\theta = 1.153 = 229^\circ$

$$\therefore \text{ดังนั้น } \theta = 229^\circ \left(\frac{\pi}{180} \right)$$

$$\theta = 3.995 \quad (\text{เป็นมุมเรเดียน})$$

จากสมการที่ (5.7) จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว คือ

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\text{แทนค่า} \quad z = \sqrt{52} (\cos (3.995) + i \sin (3.995)) \quad \text{ตอบ}$$

18. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z = 2 - i$ ในรูปเชิงขั้วและมุมเป็นเรเดียน

วิธีทำ รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน $z = 2 - i$

หาค่า r จากสมการที่ (5.9)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{แทนค่า} \quad r = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2}$$

$$r = \sqrt{4 + 1}$$

$$r = \sqrt{5}$$

หาค่า θ จากสมการที่ (5.11)

$$\tan \theta = \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$\text{แทนค่า} \quad \tan \theta = \left(\frac{-1}{2} \right)$$

$$\tan \theta = -0.5$$

แต่ $2 - i$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 4

จากตารางฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตรงช่อง \tan จะเห็นว่า $\theta = -0.5 \approx 333^\circ$

$$\therefore \text{ดังนั้น } \theta = 333^\circ \left(\frac{\pi}{180} \right)$$

$$\theta = 5.81 \quad (\text{เป็นมุมเรเดียน})$$

จากสมการที่ (5.7) จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว คือ

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

แทนค่า

$$z = \sqrt{5} (\cos (5.81) + i \sin (5.81))$$

ตอบ

19. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z = 6 + i8$ ในรูปเชิงขั้ว และมุมเป็นเรเดียน

วิธีทำ รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน $z = 6 + i8$

หาค่า r จากสมการที่ (5.9)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

แทนค่า

$$r = \sqrt{(6)^2 + (8)^2}$$

$$r = \sqrt{36 + 64}$$

$$r = \sqrt{100}$$

หาค่า θ จากสมการที่ (5.11)

$$\tan \theta = \left(\frac{y}{x} \right)$$

แทนค่า

$$\tan \theta = \left(\frac{8}{6} \right)$$

$$\tan \theta = 1.33$$

แต่ $6 + i8$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 1

จากตารางฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตรงช่อง \tan จะเห็นว่า $\theta = 1.33 \approx 53^\circ$

$$\therefore \quad \text{ดังนั้น } \theta = 53^\circ \left(\frac{\pi}{180} \right)$$

$$\theta = 0.925 \quad (\text{เป็นมุมเรเดียน})$$

จากสมการที่ (5.7) จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว คือ

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

แทนค่า $z = \sqrt{100} (\cos (0.925) + i \sin (0.925))$ **ตอบ**

20. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z = 7 + i2$ ในรูปเชิงขั้ว และมุมเป็นเรเดียน

วิธีทำ รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน $z = 7 + i2$

หาค่า r จากสมการที่ (5.9)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

แทนค่า

$$r = \sqrt{(7)^2 + (2)^2}$$

$$r = \sqrt{49 + 4}$$

$$r = \sqrt{53}$$

หาค่า θ จากสมการที่ (5.11)

$$\tan \theta = \left(\frac{y}{x} \right)$$

แทนค่า

$$\tan \theta = \left(\frac{2}{7} \right)$$

$$\tan \theta = 0.286$$

แต่ $7 + i2$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 1

จากตารางฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตรงช่อง \tan จะเห็นว่า $\theta = 0.286 \approx 16^\circ$

$$\therefore \quad \text{ดังนั้น } \theta = 16^\circ \left(\frac{\pi}{180} \right)$$

$$\theta = 0.279 \quad (\text{เป็นมุมเรเดียน})$$

จากสมการที่ (5.7) จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วคือ

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

แทนค่า $z = \sqrt{53} (\cos (0.279) + i \sin (0.279))$ **ตอบ**

21. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z = -6 - i5$ ในรูปเชิงขั้ว และมุมเป็นเรเดียน

วิธีทำ รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน $z = -6 - i5$

หาค่า r จากสมการที่ (5.9)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

แทนค่า

$$r = \sqrt{(-6)^2 + (-5)^2}$$

$$r = \sqrt{36 + 25}$$

$$r = \sqrt{61}$$

หาค่า θ จากสมการที่ (5.11)

$$\tan \theta = \left(\frac{y}{x} \right)$$

แทนค่า

$$\tan \theta = \left(\frac{-5}{-6} \right)$$

$$\tan \theta = 0.833$$

แต่ $-6 - i5$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 3

จากตารางฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตรงช่อง \tan จะเห็นว่า $\theta = 0.833 \approx 220^\circ$

$$\therefore \text{ดังนั้น } \theta = 220^\circ \left(\frac{\pi}{180} \right)$$

$$\theta = 3.84 \quad (\text{เป็นมุมเรเดียน})$$

จากสมการที่ (5.7) จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว คือ

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

แทนค่า

$$z = \sqrt{61} (\cos (3.84) + i\sin (3.84)) \quad \text{ตอบ}$$

22. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z = 8 - i2$ ในรูปเชิงขั้ว และมุมเป็นองศา

วิธีทำ รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน $z = 8 - i2$

หาค่า r จากสมการที่ (5.9)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

แทนค่า

$$r = \sqrt{(8)^2 + (-2)^2}$$

$$r = \sqrt{64 + 4}$$

$$r = \sqrt{68}$$

หาค่า θ จากสมการที่ (5.10)

$$\tan \theta = \left(\frac{y}{x} \right)$$

แทนค่า

$$\tan \theta = \left(\frac{-2}{8} \right)$$

$$\tan \theta = -0.25 \quad (\text{เป็นมุมองศา})$$

จากตารางตรีโกณมิติตรงช่อง $\tan = -0.25$ แล้วเลื่อนไปทางซ้ายมือ จะตรงกับช่องมุม $\theta = 166^\circ$ แต่ $8 - i2$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 4

$$\text{ดังนั้น} \quad \theta = 180^\circ + 166^\circ = 346^\circ$$

จากสมการที่ (5.7) จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วคือ

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

แทนค่า

$$z = \sqrt{68} (\cos 346^\circ + i\sin 346^\circ) \quad \text{ตอบ}$$

23. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z = -2.8 - i4.4$ ในรูปเชิงขั้ว และมุมเป็นองศา

วิธีทำ รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน $z = -2.8 - i4.4$

หาค่า r จากสมการที่ (5.9)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

แทนค่า

$$r = \sqrt{(-2.8)^2 + (-4.4)^2}$$

$$r = \sqrt{7.84 + 19.36}$$

$$r = \sqrt{27.2}$$

หาค่า θ จากสมการที่ (5.10)

$$\tan \theta = \left(\frac{y}{x} \right)$$

แทนค่า

$$\tan \theta = \left(\frac{-4.4}{-2.8} \right)$$

$$\tan \theta = 1.57 \quad (\text{เป็นมุมองศา})$$

จากตารางฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตรงช่อง \tan จะเห็นว่า $\theta = 1.57$ ไม่มีค่าในตารางให้ใช้วิธีเปิดค่าใกล้เคียงมาเข้าอัตราส่วนเพื่อหาค่ามุม

จากตารางฟังก์ชันตรีโกณมิติ \tan

	$\tan 1.5399$		$= 57^\circ$
	↓	↓	
ค่าเพิ่ม 0.0301	ค่าเพิ่ม x	ค่าเพิ่ม 1	
$\theta = 1.57$	ค่าเพิ่ม 0.0604 =		
	$\tan 1.6003$		$= 58^\circ$

นำค่าเพิ่มของทางด้านซ้ายมือและทางด้านขวามือมาเข้าอัตราส่วน จะได้

$$\frac{0.0301}{0.0604} = \frac{x}{1}$$

$$x = \frac{0.0301 \times 1}{0.0604} = 0.5$$

$$\therefore \theta = 57 + 0.5 = 57.5^\circ$$

แต่ $-2.8 - i4.4$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 3

$$\text{ดังนั้น} \quad \theta = 180^\circ + 57.5^\circ = 237.5^\circ$$

จากสมการที่ (5.7) จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว คือ

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\text{แทนค่า} \quad z = \sqrt{27.2} (\cos 237.5^\circ + i\sin 237.5^\circ) \quad \text{ตอบ}$$

24. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z = 1.2 - i1.9$ ในรูปเชิงขั้ว และมุมเป็นองศา

วิธีทำ รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน $z = 1.2 - i1.9$

หาค่า r จากสมการที่ (5.9)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{แทนค่า} \quad r = \sqrt{(1.2)^2 + (-1.9)^2}$$

$$r = \sqrt{1.44 + 3.61}$$

$$r = \sqrt{5.05}$$

หาค่า θ จากสมการที่ (5.10)

$$\tan \theta = \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$\text{แทนค่า} \quad \tan \theta = \left(\frac{1.2}{-1.9} \right)$$

$$\tan \theta = -0.632 \quad (\text{เป็นมุมองศา})$$

จากตารางฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตรงช่อง \tan จะเห็นว่า $\theta = -0.632$ ไม่มีค่าในตารางให้ใช้วิธีเปิดค่า
ใกล้เคียงมาเข้าอัตราส่วนเพื่อหาค่ามุม

จากตารางฟังก์ชันตรีโกณมิติ \tan

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \text{ค่าเพิ่ม } -0.0174 \\ \downarrow \\ \tan -0.6494 \end{array} & & \begin{array}{c} \text{ค่าเพิ่ม } x \\ \downarrow \\ \tan -0.6249 \end{array} \\
 \left. \begin{array}{c} \text{ค่าเพิ่ม } -0.0174 \\ \text{ค่าเพิ่ม } -0.0245 = \dots \end{array} \right\} & & \left. \begin{array}{c} \text{ค่าเพิ่ม } x \\ \text{ค่าเพิ่ม } 1 \end{array} \right\} \\
 \theta = -0.632 & & = 147^\circ \\
 & & = 148^\circ
 \end{array}$$

นำค่าเพิ่มของทางด้านซ้ายมือและทางด้านขวามือมาเข้าอัตราส่วน จะได้

$$\begin{aligned}
 \frac{-0.0174}{-0.0245} &= \frac{x}{1} \\
 x &= \frac{-0.0174 \times 1}{-0.0245} = 0.71
 \end{aligned}$$

$$\therefore \theta = 147 + 0.71 = 147.71^\circ$$

แต่ $1.2 - i1.9$ อยู่ในควอดรันต์ที่ 4

$$\text{ดังนั้น } \theta = 180^\circ + 147.71^\circ = 327.71^\circ$$

จากสมการที่ (5.7) จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว คือ

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\text{แทนค่า } z = \sqrt{5.05} (\cos 327.71^\circ + i\sin 327.71^\circ) \quad \text{ตอบ}$$

เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 6 เมทริกซ์

จงแสดงวิธีการคำนวณ

1. จงหาเมตริกซ์ทรานสโพสของ

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ นำสมาชิกในแถวที่ 1 ของเมทริกซ์ทั้งแถวมาเรียงกันเป็นคอลัมน์ที่ 1

$$A^T = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

นำสมาชิกในแถวที่ 2 ของเมทริกซ์ทั้งแถวมาเรียงกันเป็นคอลัมน์ที่ 2

$$A^T = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

นำสมาชิกในแถวที่ 3 ของเมทริกซ์ทั้งแถวมาเรียงกันเป็นคอลัมน์ที่ 3

$$A^T = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ -3 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

ตอบ

2. จงหาเมตริกซ์ทรานสโพสของ

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 9 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

ตอบ

3. จงหา $A + B$

กำหนด $A = \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

วิธีทำ $A + B = \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} -5+4 & 9+1 \\ 8+6 & 2+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 14 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{ตอบ}$$

4. จงหา $B + A$

กำหนด $A = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

วิธีทำ $B + A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$B + A = \begin{bmatrix} 1+(-4) & 6+5 \\ 4+1 & 7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 11 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{ตอบ}$$

5. จงหา $A + B$

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -5 & 9 & 8 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

วิธีทำ $A + B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -5 & 9 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

ไม่สามารถหาผลบวกได้เนื่องจากเมทริกซ์ A และ B มีขนาดไม่เท่ากัน ตอบ

6. จงแสดงสมบัติการบวกของเมทริกซ์

1. $A + B = B + A$

2. $(A + B) + C = A + (B + C)$

เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 9 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$

วิธีทำ $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1+1 & 9+3 \\ 3+1 & 7+2 \\ 5+(-1) & 0+5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B + A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+1 & 3+9 \\ 1+3 & 2+7 \\ -1+5 & 5+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$A + B = B + A$$

ตอบ

$$(A + B) + C = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + C$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 9 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+(-2) & 12+8 \\ 4+1 & 9+9 \\ 4+9 & 5+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 20 \\ 5 & 18 \\ 13 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A + (B + C) = A + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 9 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= A + \begin{bmatrix} 1+(-2) & 3+8 \\ 1+1 & 2+9 \\ -1+9 & 5+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 11 \\ 2 & 11 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 + (-1) & 9 + 11 \\ 3 + 2 & 7 + 11 \\ 5 + 8 & 0 + 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 20 \\ 5 & 18 \\ 13 & 6 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

ตอบ

7. จงหาผลลบของเมทริกซ์ $A - B$

เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$A - B = A + (-B)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -5 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + (-1) & 3 + (-4) \\ 1 + (-5) & 2 + 3 \\ -1 + 1 & 5 + (-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ตอบ

8. จงหาผลลบของเมทริกซ์ $A - B$

$$\text{เมื่อ } A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} A - B &= A + (-B) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & -9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ไม่สามารถหาผลบวกได้เนื่องจากเมทริกซ์ A และ B มีขนาดไม่เท่ากัน

ตอบ

9. จงหาผลลัพธ์ของเมทริกซ์ ดังนี้

1. $3A$

2. $2A + 2B$

$$\text{เมื่อ } A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

1. $3A$

$$\begin{aligned} 3A &= 3 \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 5 & 3 \times (-1) \\ 3 \times -2 & 3 \times 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 15 & -3 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ตอบ

2. $2A + 2B$

$$\begin{aligned} 2A + 2B &= 2 \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 + 6 & -2 + 4 \\ -4 + 2 & 2 + 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ตอบ

10. จงหาผลลัพธ์ของเมทริกซ์ ดังนี้

1. $3A$

2. $A - 3B$

เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

วิธีทำ 1. $3A$

$$3A = 3 \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 15 & -9 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{ตอบ}$$

2. $A - 3B$

$$\begin{aligned} A - 3B &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + (-3) \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -15 \\ -12 & 3 \\ 9 & -6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 + (-3) & 4 + (-15) \\ 5 + (-12) & -3 + 3 \\ -1 + 9 & 2 + (-6) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -11 \\ -7 & 0 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

11. กำหนด $A = [1 \ 3 \ 4]$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ จงหา AB

วิธีทำ $C = A \times B = (1 \times 3) (3 \times 1) = (1 \times 1)$

$$C = [1 \ 3 \ 4] \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

ให้นำคอลัมน์ของ B คูณกับแถวของ A แล้วบวกเข้าด้วยกัน

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} \times = [3 \times 1 + 4 \times 3 + 7 \times 4]$$

$$C = [3 + 12 + 28]$$

$$C = 43$$

ตอบ

12. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $B = [1 \ 9 \ 3]$ จงหา AB

วิธีทำ

$$C = A \times B = (3 \times 1)(1 \times 3) = (3 \times 3)$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 9 \ 3]$$

ให้นำคอลัมน์ของ A คูณกับแถวของ B ทุกแถว

$$C = \begin{bmatrix} 5 \times 1 & 5 \times 9 & 5 \times 3 \\ 3 \times 1 & 3 \times 9 & 3 \times 3 \\ 1 \times 1 & 1 \times 9 & 1 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 45 & 15 \\ 3 & 27 & 9 \\ 1 & 9 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ตอบ}$$

13. กำหนด $A = [1 \ 2 \ 1]$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา AB

วิธีทำ

$$C = A \times B = (1 \times 3)(3 \times 2) = (1 \times 2)$$

$$C = [1 \ 2 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ให้นำคอลัมน์ของ B คูณกับแถวของ A ทุกแถวแล้วบวกกัน

$$\begin{aligned} C &= [(1 \times 1) + (2 \times 1) + (1 \times -1) \quad (1 \times -4) + (2 \times 2) + (1 \times 2)] \\ &= [1 + 2 - 1 \quad -4 + 4 + 2] \\ &= [2 \ 2] \end{aligned} \quad \text{ตอบ}$$

14. จงแสดงให้เห็นว่าเมทริกซ์ $AB \neq BA$

เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} (-1 \times -1) + (2 \times 1) & (-1 \times 2) + (2 \times 3) \\ (4 \times -1) + (1 \times 1) & (4 \times 2) + (1 \times 3) \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 + 2 & -2 + 6 \\ -4 + 1 & 8 + 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$C = B \times A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} (-1 \times -1) + (2 \times 4) & (-1 \times 2) + (2 \times 1) \\ (1 \times -1) + (3 \times 4) & (1 \times 2) + (3 \times 1) \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1+8 & -2+2 \\ -1+12 & 2+3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า $AB \neq BA$ ตอบ

15. จงคูณเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$

วิธีทำ $C = A \times B = (2 \times 3)(3 \times 2) = (2 \times 2)$

ให้นำแถวของ A คูณกับคอลัมน์ของ B ทุกคอลัมน์แล้วบวกกัน

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} (1 \times 1) + (-1 \times -1) + (5 \times 1) & (1 \times 3) + (-1 \times 2) + (5 \times -5) \\ (2 \times 1) + (8 \times -1) + (-3 \times 1) & (2 \times 3) + (8 \times 2) + (-3 \times -5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+1+5 & 3-2-25 \\ 2-8-3 & 6+16+15 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 7 & -24 \\ -9 & 37 \end{bmatrix}$$

ตอบ

16. จงคูณเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & 4 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$C = A \times B = (3 \times 2)(2 \times 3) = (3 \times 3)$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

ให้นำคอลัมน์ของ B คูณกับแถวของ A ทุกแถวแล้วบวกกัน

$$C = \begin{bmatrix} (2 \times 1) + (1 \times 1) & (2 \times -1) + (1 \times 9) & (2 \times 3) + (1 \times 4) \\ (-3 \times 1) + (1 \times 1) & (-3 \times -1) + (1 \times 9) & (-3 \times 3) + (1 \times 4) \\ (1 \times 1) + (4 \times 1) & (1 \times -1) + (4 \times 9) & (1 \times 3) + (4 \times 4) \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 + 1 & -2 + 9 & 6 + 4 \\ -3 + 1 & 3 + 9 & -9 + 4 \\ 1 + 4 & -1 + 36 & 3 + 16 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 10 \\ -2 & 12 & -5 \\ 5 & 35 & 19 \end{bmatrix} \quad \text{ตอบ}$$

17. จงคูณเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$ และเมทริกซ์เอกลักษณ์ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$AI = A$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (3 \times 1) + (-4 \times 0) & (3 \times 0) + (-4 \times 1) \\ (1 \times 1) + (9 \times 0) & (1 \times 0) + (9 \times 1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 + 0 & 0 + (-4) \\ 1 + 0 & 0 + 9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

หรือ $IA = A$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (1 \times 3) + (0 \times 1) & (1 \times -4) + (0 \times 9) \\ (0 \times 3) + (1 \times 1) & (0 \times -4) + (1 \times 9) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 + 0 & (-4) + 0 \\ 0 + 1 & 0 + 9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

18. จงหาค่า x, y, z จากเมทริกซ์ในรูปของระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{bmatrix} 4x & 3y \\ w & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันมีค่าเท่ากัน

$$\begin{array}{ll} \therefore & 4x = 8 \\ & x = \frac{8}{4} = 2 & \text{ตอบ} \\ & 3y = 2 \\ & y = \frac{2}{3} & \text{ตอบ} \\ & w = 7 & \text{ตอบ} \\ & z = -1 & \text{ตอบ} \end{array}$$

19. จงหาค่า x, y จากเมทริกซ์ในรูปของระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{bmatrix} 3 & 2x + 3y \\ x & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันมีค่าเท่ากัน

$$\begin{array}{ll} \therefore & x = 6 & \text{ตอบ} \\ & 2x + 3y = 3 \\ \text{แทนค่า} & 2 \times 6 + 3y = 3 \\ & 3y = 3 - 12 \\ & y = \frac{-9}{3} = -3 & \text{ตอบ} \end{array}$$

20. จงหาค่า x, y จากเมทริกซ์ในรูปของระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{bmatrix} 3x & 3x + 3y \\ y & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันมีค่าเท่ากัน

$$\begin{array}{ll} \therefore & y = 1 & \text{ตอบ} \\ & 3x = 3 \\ \text{แทนค่า} & x = \frac{3}{3} \\ & x = 1 & \text{ตอบ} \end{array}$$

เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 7 ดีเทอร์มิแนนต์

จงแสดงวิธีการคำนวณ

1. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ $|A| = \begin{vmatrix} 9 & -7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (9)(5) - (1)(-7)$

$$|A| = 45 + 7 = 52$$

ตอบ

2. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ $|A| = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = (-4)(6) - (3)(-2)$

$$|A| = -24 + 6 = -18$$

ตอบ

3. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ $|A| = \begin{vmatrix} 4 & -9 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = (4)(-8) - (6)(-9)$

$$|A| = -32 + 54 = -22$$

ตอบ

4. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ $|A| = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} = (-5)(9) - (-7)(3)$

$$|A| = -45 + 21 = -24$$

ตอบ

5. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = (2)(-6) - (-1)(7)$

$$|A| = -12 + 7 = -5$$

ตอบ

6. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 ด้วยวิธีโดยตรง

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 9 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 9 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$

$$= (3)(4)(0) + (7)(9)(2) + (8)(2)(-4) - (2)(4)(8) - (-4)(9)(3) - (0)(2)(7)$$

$$|A| = 0 + 126 - 64 - 64 + 108 - 0 = 106 \quad \text{ตอบ}$$

7. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 ด้วยวิธีโดยตรง

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$= (1)(1)(0) + (2)(1)(2) + (-3)(-1)(1) - (2)(1)(-3) - (1)(1)(1) - (0)(-1)(2)$$

$$|A| = 0 + 4 + 3 + 6 - 1 + 0 = 12 \quad \text{ตอบ}$$

8. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 ด้วยวิธีโดยตรง

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$

$$= (3)(-2)(4) + (-1)(1)(2) + (2)(1)(-3) - (2)(-2)(2) - (-3)(1)(3) - (4)(1)(-1)$$

$$|A| = -24 - 2 - 6 + 8 + 9 + 4 = -11 \quad \text{ตอบ}$$

9. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 ด้วยวิธีการกระจาย

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ โดยเลือกแถวแรกของเมทริกซ์

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2(3 \times 1 - (-1 \times 2)) - 1(0 \times 1 - 1 \times 2) + 0(0 \times (-1) - 1 \times 3) \\ &= 2(3 + 2) - 1(0 - 2) + 0 \\ &= 10 + 2 + 0 \end{aligned}$$

$$|A| = 12 \qquad \text{ตอบ}$$

10. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 ด้วยวิธีการกระจาย

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ โดยเลือกแถวแรกของเมทริกซ์

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -6 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(5 \times 2 - 1 \times 4) + 1(-6 \times 2 - 5 \times 4) + 3(-6 \times 1 - 5 \times 5) \\ &= 2(10 - 4) + 1(-12 - 20) + 3(-6 - 25) \\ &= 12 - 32 - 93 \end{aligned}$$

$$|A| = -113 \qquad \text{ตอบ}$$

11. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 ด้วยวิธีการกระจาย

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ โดยเลือกแถวแรกของเมทริกซ์

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2(1 \times (-3) - 2 \times 6) - 1(2 \times (-3) - 4 \times 6) + 6(2 \times 2 - 4 \times 1) \\ &= 2(-3 - 12) - 1(-6 - 24) + 6(4 - 4) \\ &= -30 + 30 + 0 \end{aligned}$$

$$|A| = 0 \qquad \text{ตอบ}$$

เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 8

การประยุกต์ใช้ดีเทอร์มิแนนต์หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

1. จงแก้ระบบสมการด้วยกฎของเครเมอร์

$$3x - 4y = -4$$

$$9x + 2y = 9$$

วิธีทำ เขียนระบบสมการให้อยู่ในรูป $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

แทนค่า $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 9 \end{bmatrix}$

ซึ่งตัวแปร x
$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{(-4 \times 2) - (9 \times -4)}{(3 \times 2) - (9 \times -4)}$$

$$= \frac{-8+36}{6+36} = \frac{28}{42}$$

$$= \frac{14}{21}$$

และตัวแปร y
$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 9 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{(3 \times 9) - (9 \times -4)}{(3 \times 2) - (9 \times -4)}$$

$$= \frac{27+36}{6+36}$$

$$= \frac{21}{14}$$

\therefore คำตอบของระบบสมการนี้คือ $x = \frac{14}{21}$ และ $y = \frac{21}{14}$

ตอบ

2. จงแก้ระบบสมการด้วยกฎของเครเมอร์

$$x + y = 7$$

$$4x + 3y = 12$$

วิธีทำ เขียนระบบสมการให้อยู่ในรูป $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

แทนค่า $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix}$

ซึ่งตัวแปร $x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 12 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{(7 \times 3) - (12 \times 1)}{(1 \times 3) - (4 \times 1)}$$

$$= \frac{21 - 12}{3 - 4} = \frac{9}{-1} = -9$$

และตัวแปร $y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{(1 \times 12) - (4 \times 7)}{(1 \times 3) - (4 \times 1)}$$

$$= \frac{12 - 28}{3 - 4} = \frac{-16}{-1} = 16$$

\therefore คำตอบของระบบสมการนี้ คือ $x = -9$ และ $y = 16$ **ตอบ**

3. จงแก้ระบบสมการด้วยกฎของเครเมอร์

$$3x + y = 3$$

$$6x - 3y = -3$$

วิธีทำ เขียนระบบสมการให้อยู่ในรูป $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

แทนค่า

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

ซึ่งตัวแปร x

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{(3 \times -3) - (-3 \times 1)}{(3 \times -3) - (6 \times 1)}$$

$$= \frac{-9+3}{-9-6}$$

$$= \frac{-6}{-15}$$

$$x = 0.4$$

และตัวแปร y

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{(3 \times -3) - (6 \times 3)}{(3 \times -3) - (6 \times 1)}$$

$$= \frac{-9-18}{-9-6}$$

$$= \frac{-27}{-15}$$

$$y = 1.8$$

\therefore คำตอบของระบบสมการนี้ คือ $x = 0.4$ และ $y = 1.8$

ตอบ

4. จงแก้ระบบสมการด้วยกฎของเครเมอร์

$$5x + 4z = 53$$

$$2x + 3y = 28$$

$$3y + 4z = 46$$

วิธีทำ เขียนระบบสมการให้อยู่ในรูป $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53 \\ 28 \\ 46 \end{bmatrix}$$

ใช้วิธีการกระจายหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์เพื่อแก้ระบบสมการเชิงเส้น

$$x = \frac{\begin{vmatrix} j & b & c \\ k & e & f \\ l & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 53 & 0 & 4 \\ 28 & 3 & 0 \\ 46 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{53(3 \times 4 - 3 \times 0) - 0(28 \times 4 - 46 \times 0) + 4(28 \times 3 - 46 \times 3)}{5(3 \times 4 - 3 \times 0) - 0(2 \times 4 - 0 \times 0) + 4(2 \times 3 - 0 \times 3)} \\ &= \frac{53(12 - 0) - 0 + 4(84 - 138)}{5(12 - 0) - 0 + 4(6 - 0)} \\ &= \frac{636 - 216}{60 + 24} \\ &= \frac{420}{84} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & j & c \\ d & k & f \\ g & l & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{\begin{vmatrix} 5 & 53 & 4 \\ 2 & 28 & 0 \\ 0 & 46 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{5(28 \times 4 - 46 \times 0) - 2(53 \times 4 - 46 \times 4) + 0(53 \times 0 - 28 \times 4)}{5(3 \times 4 - 3 \times 0) - 0(2 \times 4 - 0 \times 0) + 4(2 \times 3 - 0 \times 3)} \\
 &= \frac{5(112 - 0) - 2(212 - 184) + 0}{5(12 - 0) - 0 + 4(6 - 0)} \\
 &= \frac{560 - 56}{60 + 24} \\
 &= \frac{504}{84} \\
 y &= 6
 \end{aligned}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ g & h & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{\begin{vmatrix} 5 & 0 & 53 \\ 2 & 3 & 28 \\ 0 & 3 & 46 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{5(3 \times 46 - 3 \times 28) - 0(2 \times 46 - 0 \times 28) + 53(2 \times 3 - 0 \times 3)}{5(3 \times 4 - 3 \times 0) - 0(2 \times 4 - 0 \times 0) + 4(2 \times 3 - 0 \times 3)} \\
 &= \frac{5(138 - 84) - 0 + 53(6 - 0)}{5(12 - 0) - 0 + 4(6 - 0)} \\
 &= \frac{270 + 318}{60 + 24} \\
 &= \frac{588}{84} \\
 z &= 7
 \end{aligned}$$

∴ คำตอบของระบบสมการนี้ คือ $x = 5$, $y = 6$ และ $z = 7$

ตอบ

5. จงแก้ระบบสมการด้วยกฎของเครเมอร์

$$x + y - 2z = 1$$

$$-x + 2y + z = -1$$

$$y - z = 2$$

วิธีทำ เขียนระบบสมการให้อยู่ในรูป $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ใช้วิธีการกระจายหาของค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์เพื่อแก้ระบบสมการเชิงเส้น

$$x = \frac{\begin{vmatrix} j & b & c \\ k & e & f \\ l & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1(2 \times (-1) - 1 \times 1) - 1(-1 \times (-1) - 2 \times 1) + (-2)(-1 \times 1 - 2 \times 2)}{1(2 \times (-1) - 1 \times 1) - (-1)(1 \times (-1) - 1 \times (-2)) + 0(2 \times (-2) - 1 \times 1)} \\ &= \frac{1(-2-1)-1(1-2)-2(-1-4)}{1(-2-1)+1(-1+2)+0} \\ &= \frac{-3+1+10}{-3+1} \\ &= \frac{8}{-2} \\ x &= -4 \end{aligned}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & j & c \\ d & k & f \\ g & l & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1(-1 \times (-1) - 2 \times 1) - 1(1 \times (-1) - 2 \times (-2)) + 0(-1 \times 1 - 1 \times (-2))}{1(2 \times (-1) - 1 \times 1) - (-1)(1 \times (-1) - 1 \times (-2)) + 0(2 \times (-2) - 1 \times 1)} \\
 &= \frac{1(1-2) - 1(-1+4) + 0}{1(-2-1) + 1(-1+2) + 0} \\
 &= \frac{-1+3}{-3+1} \\
 &= \frac{2}{-2}
 \end{aligned}$$

$$y = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ g & h & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1(2 \times 2 - 1 \times (-1)) - (-1)(1 \times 2 - 1 \times 1) + 0(1 \times (-1) - 2 \times 1)}{1(2 \times (-1) - 1 \times 1) - (-1)(1 \times (-1) - 1 \times (-2)) + 0(2 \times (-2) - 1 \times 1)} \\
 &= \frac{1(4+1) + 1(2-1) + 0}{1(-2-1) + 1(-1+2) + 0} \\
 &= \frac{5+1}{-3+1} \\
 &= \frac{6}{-2} \\
 z &= -3
 \end{aligned}$$

∴ คำตอบของระบบสมการนี้ คือ $x = -4$, $y = -1$ และ $z = -3$ **ตอบ**

6. จงแก้ระบบสมการด้วยกฎของเครเมอร์

$$2x - 4y + 6z = 8$$

$$4x - 2y + 2z = -2$$

$$4x + y + 2z = 4$$

วิธีทำ เขียนระบบสมการให้อยู่ในรูป $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 4 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ใช้วิธีการกระจายหาของค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์เพื่อแก้ระบบสมการเชิงเส้น

$$x = \frac{\begin{vmatrix} j & b & c \\ k & e & f \\ l & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 8 & -4 & 6 \\ -2 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 4 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{8(-2 \times 2 - 1 \times 2) - (-4)(-2 \times 2 - 4 \times 2) + 6(-2 \times 1 - 4 \times (-2))}{2(-2 \times 2 - 1 \times 2) - (-4)(4 \times 2 - 4 \times 2) + 6(4 \times 1 - 4 \times (-2))} \\ &= \frac{8(-4-2) + 4(-4-8) + 6(-2+8)}{2(-4-2) + 0 + 6(4+8)} \\ &= \frac{-48 - 48 + 36}{-12 + 72} \\ &= \frac{-60}{60} \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & j & c \\ d & k & f \\ g & l & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 4 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2(-2 \times 2 - 4 \times 2) - 8(4 \times 2 - 4 \times 2) + 6(4 \times 4 - 4 \times (-2))}{2(-2 \times 2 - 1 \times 2) - (-4)(4 \times 2 - 4 \times 2) + 6(4 \times 1 - 4 \times (-2))} \\ &= \frac{2(-4-8) - 8(8-8) + 6(16+8)}{2(-4-2) + 0 + 6(4+8)} \end{aligned}$$

$$= \frac{-24 - 0 + 144}{-12 + 72}$$

$$= \frac{120}{60}$$

$$y = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ g & h & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 4 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 4 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2(-2 \times 4 - 1 \times (-2)) - (-4)(4 \times 4 - 4 \times (-2)) + 8(4 \times 1 - 4 \times (-2))}{2(-2 \times 2 - 1 \times 2) - (-4)(4 \times 2 - 4 \times 2) + 6(4 \times 1 - 4 \times (-2))}$$

$$= \frac{2(-8+2) + 4(16+8) + 8(4+8)}{2(-4-2) + 0 + 6(4+8)}$$

$$= \frac{-12 + 96 + 96}{-12 + 72}$$

$$= \frac{180}{60}$$

$$z = 3$$

\therefore คำตอบของระบบสมการนี้ คือ $x = -1, y = 2$ และ $z = 3$ **ตอบ**

7. สารละลาย x มีความเข้มข้น 12% และสารละลาย y มีความเข้มข้น 27% ถูกนำมาผสมกันเพื่อให้มีความเข้มข้น 24% และมีปริมาตร 15 ลิตร จงหาปริมาตรของสารละลาย x และสารละลาย y

วิธีทำ กำหนดให้สารละลายที่มีความเข้มข้น 12% คือ x

และให้สารละลายที่มีความเข้มข้น 27% คือ y

ต้องการผสมสารละลาย x และ y ให้มีปริมาตร 15 ลิตร

ปริมาณของสารละลาย	x	y	15 l

\therefore

$$x + y = 15$$

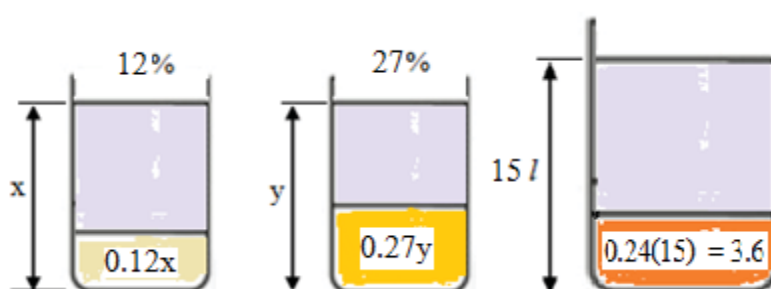
(1)

ต้องการผสมสารละลาย x และ y ให้มีความเข้มข้น 24% ของปริมาตร 15 ลิตร

	12%	27%	24%
ปริมาณของสารละลาย	x	y	15 l
ปริมาณของสารเคมี	0.12x	0.27y	$0.24(15) = 3.6$

∴ จำนวนของสารเคมีในสารละลาย x และ y คือ

$$0.12x + 0.27y = 3.6 \quad (2)$$



เขียนระบบสมการ (1) และ (2) ให้อยู่ในรูป $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

แทนค่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.12 & 0.27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 3.6 \end{bmatrix}$$

สารละลาย

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 15 & 1 \\ 3.6 & 0.27 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0.12 & 0.27 \end{vmatrix}} = \frac{(15 \times 0.27) - (3.6 \times 1)}{(1 \times 0.27) - (0.12 \times 1)}$$

$$x = \frac{4.05 - 3.6}{0.27 - 0.12} = \frac{0.45}{0.15}$$

$$x = 3 \text{ l}$$

$$\begin{aligned}
 \text{สารละลาย} \quad y &= \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 0.12 & 3.6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0.12 & 0.27 \end{vmatrix}} = \frac{(1 \times 3.6) - (0.12 \times 15)}{(1 \times 0.27) - (0.12 \times 1)} \\
 &= \frac{3.6 - 1.8}{0.27 - 0.12} = \frac{1.8}{0.15} \\
 y &= 12 \text{ l}
 \end{aligned}$$

\therefore สารละลาย x = 3 l และสารละลาย y = 12 l ตอบ

8. น้ำยาหล่อเย็นรถยนต์มีสารป้องกันน้ำแข็งตัวคือ สารเอทิลีน ไกลคอล (Ethylene Glycol) 85% ถูกผสมกับน้ำเพื่อให้มีสารเอทิลีน ไกลคอล 60% และมีส่วนผสมทั้งหมด 35 ลิตร จงหาปริมาณของสารเอทิลีน ไกลคอล และปริมาณของน้ำ

วิธีทำ กำหนดให้ปริมาณของสารเอทิลีน ไกลคอลคือ x และน้ำ คือ y

ต้องการส่วนผสมทั้งหมด 35 ลิตร

ปริมาณของส่วนผสม	x	y	35 l

$$\therefore x + y = 35 \quad (1)$$

ต้องการผสมสารเอทิลีน ไกลคอล x และน้ำ y ให้มีความเข้มข้น 50% ของปริมาณทั้งหมด 20 ลิตร

	85%	0%	60%
ปริมาณของส่วนผสม	x	y	35 l
ปริมาณของสารเอทิลีน ไกลคอล	0.85x	0y	0.6(35) = 21 l

∴ จำนวนของสารเคมีในสารละลาย x และ y คือ

$$0.85x + 0y = 21 \quad (2)$$

เขียนระบบสมการ (1) และ (2) ให้อยู่ในรูป $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

แทนค่า $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.85 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 21 \end{bmatrix}$

ปริมาณของสารเอทิลีนไกลคอล, $x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 35 & 1 \\ 21 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0.85 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{(35 \times 0) - (21 \times 1)}{(1 \times 0) - (0.85 \times 1)}$$

$$x = \frac{-21}{-0.85}$$

$$x = 24.71 \text{ l}$$

และปริมาณของน้ำ $y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 35 \\ 0.85 & 21 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0.85 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{(1 \times 21) - (0.85 \times 35)}{(1 \times 0) - (0.85 \times 1)}$$

$$= \frac{-8.75}{-0.85}$$

$$y = 10.29 \text{ l}$$

∴ ปริมาณของสารเอทิลีนไกลคอล = 24.71 l

และปริมาณของน้ำ = 10.29 l

ตอบ

9. เครื่องบินโดยสารลำหนึ่ง บินจากสนามบินดอนเมืองไปสนามบินเชียงใหม่มีระยะทาง 880 กิโลเมตร ด้วยเวลา 1 ชั่วโมง 20 นาที และเที่ยวบินกลับด้วยระยะทางเดียวกันใช้เวลา 1 ชั่วโมง จงหาความเร็วของเครื่องบิน และความเร็วของอากาศสมมติให้ความเร็วทั้งสองมีค่าคงที่

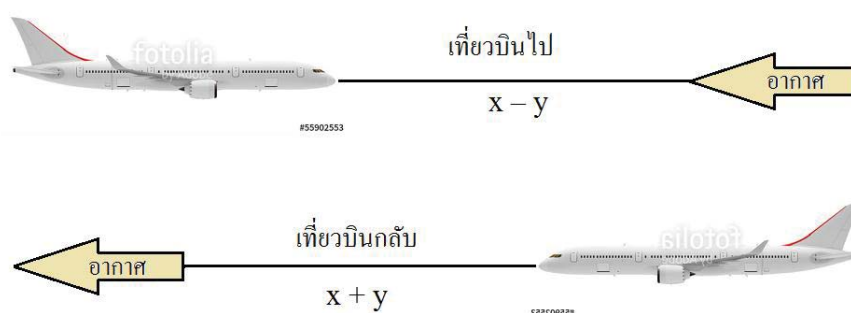
วิธีทำ เวลาที่ใช้ในการเดินทางจากสนามบินดอนเมืองไปสนามบินเชียงใหม่ มากกว่าเวลาที่ใช้ในการเดินทางจากสนามบินเชียงใหม่กลับสนามบินดอนเมือง แสดงว่ามีการต้านทานของอากาศ

กำหนดให้ความเร็วของเครื่องบินคือ x และความเร็วของอากาศคือ y

เที่ยวบินไปมีความเร็ว $= x - y$

เที่ยวบินกลับมีความเร็ว $= x + y$

ดังแสดงในรูป



ใช้สมการระยะทาง คือ ระยะทาง = ความเร็ว \times เวลา

$$\therefore \text{เที่ยวบินไป} \quad 880 \text{ km} \quad = (x - y)\left(1 + \frac{20}{60}\right)$$

$$1.3x - 1.33y = 880 \quad (1)$$

$$\text{เที่ยวบินกลับ} \quad 880 \text{ km} \quad = (x + y)(1 \text{ hr})$$

$$x + y = 880 \quad (2)$$

เขียนระบบสมการ (1) และ (2) ให้อยู่ในรูป $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

แทนค่า

$$\begin{bmatrix} 1.33 & -1.33 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 880 \\ 880 \end{bmatrix}$$

ซึ่งความเร็วของเครื่องบิน,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 880 & -1.33 \\ 880 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1.33 & -1.33 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(880 \times 1) - (880 \times (-1.33))}{(1.33 \times 1) - (1 \times (-1.33))}$$

$$x = \frac{880 + 1,170.4}{1.33 + 1.33} = \frac{2,050.4}{2.66}$$

$$x = 770.83 \text{ km/hr}$$

และความเร็วของอากาศ

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1.33 & 880 \\ 1 & 880 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1.33 & -1.33 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(1.33 \times 880) - (1 \times 880)}{(1.33 \times 1) - (1 \times (-1.33))}$$

$$= \frac{1,170.4 - 880}{1.33 + 1.33} = \frac{290.4}{2.66}$$

$$y = 109.17 \text{ km/hr}$$

∴ ความเร็วของเครื่องบิน = 770.83 km/hr

ความเร็วของอากาศ = 109.17 km/hr

ตอบ

10. นายเอกเดินทางไปเชียงรายโดยทางรถยนต์และเครื่องบินด้วยระยะทางทั้งหมด 950 กิโลเมตร และรวมเวลาทั้งหมด 3 ชั่วโมง โดยขับรถยนต์ไปสนามบินด้วยความเร็วเฉลี่ย 90 กิโลเมตร/ชั่วโมง และเครื่องบินใช้ความเร็วเฉลี่ย 750 กิโลเมตร/ชั่วโมง จงหาเวลาที่นายเอกขับรถยนต์ไปสนามบินและเวลาที่เครื่องบินบินไปเชียงราย

วิธีทำ กำหนดให้เวลาที่ขับรถยนต์ไปสนามบินคือ x และเวลาที่เครื่องบินบินไปเชียงรายคือ y

เวลาที่ใช้ในการเดินทางทั้งหมด $x + y = 3$ (1)

ระยะทางทางรถยนต์ = ความเร็ว \times เวลา = $90x$

ระยะทางทางเครื่องบิน = ความเร็ว \times เวลา = $750y$

∴ ระยะทางทั้งหมด คือ $90x + 750y = 950$ (2)

เขียนระบบสมการ (1) และ (2) ให้อยู่ในรูป $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

แทนค่า $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 90 & 750 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 950 \end{bmatrix}$

ซึ่งเวลาขับรถยนต์,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 950 & 750 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 90 & 750 \end{vmatrix}} = \frac{(3 \times 750) - (950 \times 1)}{(1 \times 750) - (90 \times 1)}$$

$$x = \frac{2,250 - 950}{750 - 90} = \frac{1,300}{660}$$

$$x = 1.97 \text{ hr}$$

และเวลาเครื่องบิน

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 90 & 950 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 90 & 750 \end{vmatrix}} = \frac{(1 \times 950) - (90 \times 3)}{(1 \times 750) - (90 \times 1)}$$

$$y = \frac{950 - 270}{750 - 90} = \frac{680}{660}$$

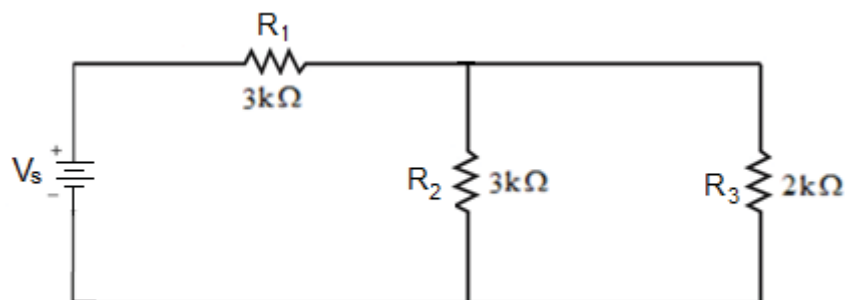
$$= 0.95 \text{ hr}$$

$$\therefore \text{เวลาขับรถยนต์} = 1.97 \text{ hr}$$

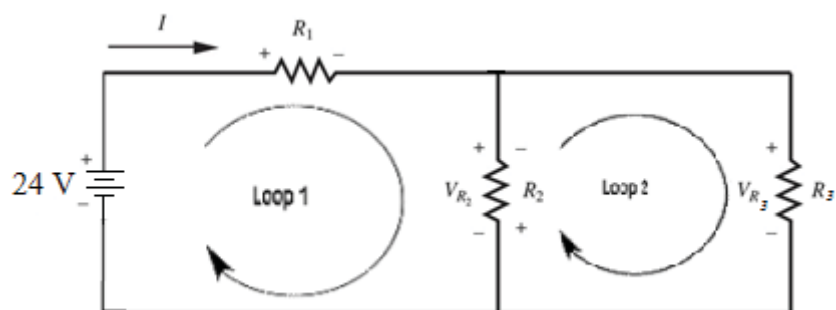
$$\text{เวลาเครื่องบิน} = 1.03 \text{ hr}$$

ตอบ

11. จงหาค่ากระแสไฟฟ้า I_1 และ I_2 ที่ไหลผ่านในวงจร ดังแสดงในรูป

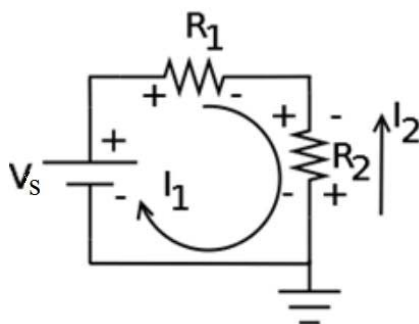


วิธีทำ กำหนดลูปและทิศทางของลูป และกำหนดขั้วไฟฟ้าให้กับอุปกรณ์ไฟฟ้า



ใช้กฎในเรื่องแรงดันไฟฟ้า (Kirchhoff's Voltage Law; KVL) คือผลรวมของแรงดันไฟฟ้ารอบวงปิด (Loop) = 0

ที่ลูป 1 กระแสไฟฟ้า I_1 จะไหลผ่าน R_1, R_2 และที่ R_2 จะมีกระแส I_2 จากลูปที่ 2 ไหลผ่านแต่เป็นการไหลสวนทางกัน



ใช้กฎแรงเคลื่อนไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์ โดยเริ่มที่มุมบนซ้ายมือไปตามเข็มนาฬิกา

$$I_1 R_1 + (I_1 - I_2) R_2 - 24 = 0$$

$$I_1 R_1 + I_1 R_2 - I_2 R_2 = 24$$

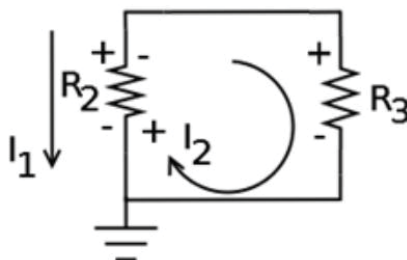
$$(R_1 + R_2) I_1 - I_2 R_2 = 24$$

แทนค่า $(3\text{k}\Omega + 3\text{k}\Omega) I_1 - 3\text{k}\Omega (I_2) = 24$

$$6\text{k}\Omega (I_1) - 3\text{k}\Omega (I_2) = 24$$

$$6I_1 - 3I_2 = 24 \quad (1)$$

ที่รูป 2 กระแสไฟฟ้า I_2 จะไหลผ่าน R_3 และไหลผ่าน R_2 ซึ่งก็จะไหลสวนทางกับ I_1



ใช้กฎแรงเคลื่อนไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์ โดยเริ่มที่มุมบนขวามือไปตามเข็มนาฬิกา

$$I_2 R_3 + (I_2 - I_1) R_2 = 0$$

$$I_2 R_3 + I_2 R_2 - I_1 R_2 = 0$$

$$(R_2 + R_3) I_2 - I_1 R_2 = 0$$

แทนค่า $(3\text{k}\Omega + 2\text{k}\Omega) I_2 - 3\text{k}\Omega (I_1) = 0$

$$-3I_1 + 5I_2 = 0 \quad (2)$$

เขียนระบบสมการ (1) และ (2) ให้อยู่ในรูป $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

แทนค่า $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 0 \end{bmatrix}$

ซึ่งกระแสไฟฟ้า , $I_1 = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 24 & -3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{(24 \times 5) - (0 \times (-3))}{(6 \times 5) - (-3 \times (-3))}$$

$$= \frac{120-0}{30-9} = \frac{120}{21}$$

$$I_1 = 5.71 \text{ A}$$

และกระแสไฟฟ้า,
$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

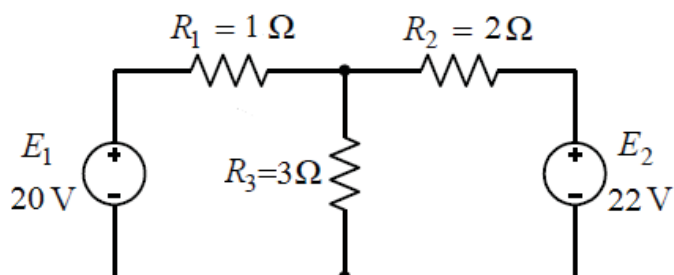
$$= \frac{\begin{vmatrix} 6 & 24 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{(6 \times 0) - (-3 \times 24)}{(6 \times 5) - (-3 \times (-3))}$$

$$= \frac{0+72}{30-9} = \frac{72}{21}$$

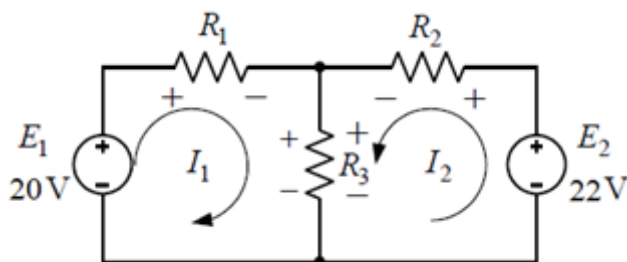
$$I_2 = 3.43 \text{ A}$$

∴ คำตอบของระบบสมการนี้คือ $I_1 = 5.71 \text{ A}$ และ $I_2 = 3 \text{ A}$ **ตอบ**

12. จงหาค่ากระแสไฟฟ้า I_1 และ I_2 ที่ไหลผ่านในวงจร ดังแสดงในรูป



วิธีทำ กำหนดลูปกระแส (I_1) และลูปกระแส (I_2) ให้มีทิศทางการไหลตามหัวของแหล่งจ่ายแรงดัน (ออกจากขั้วบวกเข้าหาขั้วลบ) ทั้ง 2 ลูปและกำหนดหัวของแรงดันไฟฟ้าตกคร่อมตัวต้านทาน



ใช้กฎในเครื่องแรงดันไฟฟ้า (Kirchhoff's Voltage Law; KVL) คือผลรวมของแรงดันไฟฟ้ารอบวงปิด (Loop) = 0

$$\begin{aligned}
 \text{ลูป 1} \quad & V_{R1} + V_{R3} - 20V = 0 \\
 & I_1 R_1 + (I_1 + I_2) R_3 = 20V \\
 \text{แทนค่า R} \quad & 1I_1 + 3(I_1 + I_2) = 20V \\
 & 3I_1 + 3I_1 + 3I_2 = 20V \\
 & 6I_1 + 3I_2 = 20V \quad (1)
 \end{aligned}$$

(ที่ R_3 จะมีกระแสไฟฟ้า I_1 และ I_3 ไหลผ่านในทิศทางเดียวกัน)

$$\begin{aligned}
 \text{ลูป 2} \quad & V_{R2} + V_{R3} - 22V = 0 \\
 & I_2 R_2 + (I_1 + I_2) R_3 = 22V \\
 \text{แทนค่า R} \quad & 2I_2 + 3(I_1 + I_2) = 22V \\
 & 2I_2 + 3I_1 + 3I_2 = 22V \\
 & 3I_1 + 5I_2 = 22V \quad (2)
 \end{aligned}$$

เขียนระบบสมการ (1) และ (2) ให้อยู่ในรูป $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

$$\text{แทนค่า} \quad \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 22 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ซึ่งกระแสไฟฟ้า} \quad I_1 &= \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{\begin{vmatrix} 20 & 3 \\ 22 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{(20 \times 5) - (22 \times 3)}{(6 \times 5) - (3 \times 3)}
 \end{aligned}$$

$$I_1 = \frac{100 - 66}{30 - 9} = \frac{34}{21} = 1.62 \text{ A}$$

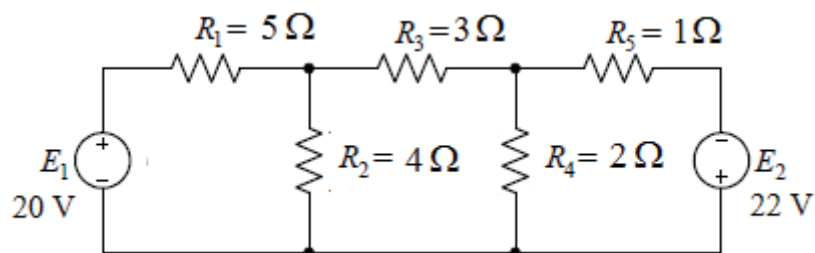
$$\text{และกระแสไฟฟ้า} \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 6 & 20 \\ 3 & 22 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{(6 \times 22) - (3 \times 20)}{(6 \times 5) - (3 \times 3)}$$

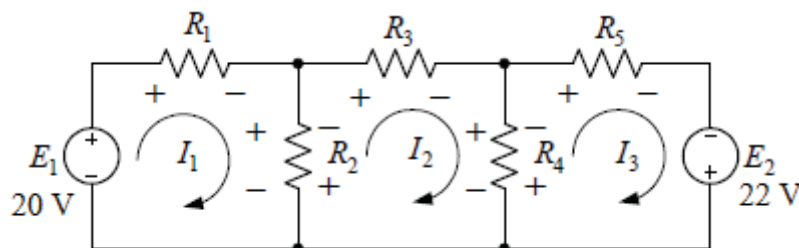
$$I_2 = \frac{132 - 60}{30 - 9} = \frac{72}{21} = 3.43 \text{ A}$$

∴ คำตอบของระบบสมการนี้คือ $I_1 = 162 \text{ A}$ และ $I_2 = 3.43 \text{ A}$ **ตอบ**

13. จงหาค่ากระแสไฟฟ้า I_1 , I_2 และ I_3 ที่ไหลผ่านในวงจร ดังแสดงในรูป



วิธีทำ กำหนดลูปกระแส I_1 , I_2 และ I_3 ให้มีทิศทางตามหัวของแหล่งจ่ายแรงดัน (ออกจากขั้วบวกเข้าหาขั้วลบ) ทั้ง 3 ลูปและกำหนดหัวของแรงดันไฟฟ้าตกคร่อมตัวต้านทาน



ใช้กฎในเครื่องแรงดันไฟฟ้า (Kirchhoff's Voltage Law; KVL) คือผลรวมของแรงดันไฟฟ้ารอบวงปิด (Loop) = 0

ลูป 1

$$V_{R1} + V_{R2} - 20V = 0$$

$$I_1 R_1 + (I_1 - I_2) R_2 = 20V$$

แทนค่า R

$$5I_1 + 3(I_1 - I_2) = 20V$$

$$5I_1 + 3I_1 - 3I_2 = 20V$$

$$5I_1 - 3I_2 = 20V \quad (1)$$

ลูป 2

$$V_{R3} + V_{R4} + V_{R2} = 0$$

$$I_2 R_3 + (I_2 - I_3) R_4 + (I_2 - I_1) R_2 = 0$$

แทนค่า R

$$3I_2 + 2(I_2 - I_3) + 4(I_2 - I_1) = 0$$

$$\begin{aligned} 3I_2 + 2I_2 - 2I_3 + 4I_2 - 4I_1 &= 0 \\ -4I_1 + 9I_2 - 2I_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ลูป 3 $V_{R5} + V_{R4} + 22V = 0$

แทนค่า R $I_3 R_5 + (I_3 - I_2) R_4 = -22V$

$$\begin{aligned} I_3 + 2(I_3 - I_2) &= -22V \\ I_3 + 2I_3 - 2I_2 &= -22V \\ -2I_2 + 3I_3 &= -22V \end{aligned} \quad (3)$$

เขียนระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูป $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ -22 \end{bmatrix}$$

ใช้วิธีการกระจายหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์เพื่อแก้ระบบสมการเชิงเส้น

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} j & b & c \\ k & e & f \\ l & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 20 & -3 & 0 \\ 0 & 9 & -2 \\ -22 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{20(9 \times 3 - (-2) \times (-2)) - (-3)(0 \times 3 - (-22) \times (-2)) + 0(0 \times (-2) - (-22) \times (9))}{5(9 \times 3 - (-2) \times (-2)) - (-3)((-4) \times 3 - 0 \times (-2)) + 0(-4 \times (-2) - 0 \times (9))}$$

$$= \frac{20(27-4) + 3(0-44) + 0}{5(27-4) + 3(-12+0) + 0}$$

$$= \frac{20(23)+3(-44)}{5(23)+3(-12)}$$

$$= \frac{460-132}{115-36}$$

$$= \frac{328}{79}$$

$$I_1 = 4.15 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & j & c \\ d & k & f \\ g & l & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 20 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \\ 0 & -22 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}} =$$

$$\frac{5(0 \times 3 - (-22) \times (-2)) - 20(-4 \times 3 - 0 \times (-2)) + 0(-4 \times (-22) - 0 \times 0)}{5(9 \times 3 - (-2) \times (-2)) - (-3)((-4) \times 3 - 0 \times (-2)) + 0(-4 \times (-2) - 0 \times (9))}$$

$$= \frac{5(0+22)-20(-12-0)+0}{5(27-4)+3(-12+0)+0}$$

$$= \frac{5(22)-20(-12)}{5(23)+3(-12)}$$

$$= \frac{110+240}{115-36}$$

$$= \frac{350}{79}$$

$$I_2 = 4.43 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ g & h & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 & 20 \\ -4 & 9 & 0 \\ 0 & -2 & -22 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}} =$$

$$\frac{5(9 \times (-22) - (-2) \times 0) - (-3)((-4) \times (-22) - (0 \times 0)) + 20((-4) \times (-2) - 0 \times 9)}{5(9 \times 3 - (-2) \times (-2)) - (-3)((-4) \times 3 - 0 \times (-2)) + 0(-4 \times (-2) - 0 \times (9))}$$

$$= \frac{5(-198-0)+3(88-0)+20(8-0)}{5(27-4)+3(-12+0)+0}$$

$$= \frac{5(-198)+3(88)+20(8)}{5(23)+3(-12)}$$

$$= \frac{-990+264+160}{115-36}$$

$$= \frac{-566}{79}$$

$$I_3 = -7.16 \text{ A}$$

∴ คำตอบของระบบสมการนี้คือ $I_1 = 4.15 \text{ A}$, $I_2 = 4.43 \text{ A}$ และ $I_3 = -7.16 \text{ A}$ **ตอบ**
